TD 1 : Sommes et produits (Corrigé)

1

1)

$$A_n=\sum_{k=1}^{n}k(k+1)=\sum_{k=1}^{n}k^2+k\overset{\text{(Linéarité)}}{=}\sum_{k=1}^{n}k^2+\sum_{k=1}^{n}k$$
$$=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+\frac{n(n+1)}{2}=n(n+1)[\frac{2n+1}{6}+\frac{1}{2}].$$

2)

$$B_n=\sum_{k=1}^{n}k(n-k)=\sum_{k=1}^{n}nk-k^2\overset{\text{(Linéarité)}}{=}n\sum_{k=1}^{n}k-\sum_{k=1}^{n}k^2$$
$$=n\frac{n(n+1)}{2}-\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}=n(n+1)[\frac{2n+1}{6}+\frac{n}{2}].$$

3)

$$C_n=\sum_{k=1}^{n}(2n+1)^2=\sum_{k=1\text{où } k\text{impair}}^{2n+1}k^2$$
$$\overset{\text{(Relation de Chasles pair/impair)}}{=}\sum_{k=1}^{2n+1}k^2-\sum_{k=1\text{ où } k\text{ pair}}^{2n+1}k^2$$
$$=n\frac{(2n+1)(2n+2)(4n+3)}{6}-\sum_{k=1}^{n}(2k)^2$$
$$=n\frac{(2n+1)(2n+2)(4n+3)}{6}-4\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$
$$\overset{\text{Factorisation par}\frac{n(2n+1)(n+1)}{6}}{=}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}[2(4n+3)-4]$$

4) $D_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}$ (Exemple vu en cours,Indication : $\frac{1}{k(k+1)}=\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}$ +Télescopage)

2

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}(2k+1)\overset{\text{Linéarité}}{=}2\sum_{k=1}^{n}k+\sum_{k=1}^{n}1$$
$$=2\frac{n(n+1)}{2}+n=n(n+2).$$

3 Nous reverrons ceci plus en détail lorsque nous attaquerons le chapitre sur les suites mais pour montrer qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strcitement croissante, il faut montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}, u_{n+1}>u_n$ ou encore $u_{n+1}-u_n>0$ (si la suite est une suite de réels strictement positifs, on peut également regarder si $\frac{u_{n+1}}{u_n}>1$). Quand on veut montrer une proposition qui commence par "pour tout" que fait-on (autre que récurrence) ?...
Soit $n\in\mathbb{N}$,

$$u_{n+1}-u_n=\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{n+1+k}-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k}$$

J'enlève et je rajoute (j'ajoute 0) le terme d'indice $n+1$ de la première somme pour pouvoir rassembler les 2 sommes et faire apparaître un télescopage :

$$un+1-u_n=\frac{1}{2n+2}+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+1+k}-\frac{1}{n+k}$$
$$\overset{\text{Télescopage}}{=}\frac{1}{2n+2}+[\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{n+1}]$$
$$\overset{\text{On passe au même dénominateur}}{=}\frac{1}{(2n+2)(2n+1)}>0$$

La suite $(u_n)n\in\mathbb{N}$ est donc bien strictement croissante.

4

1) Cas classique des sommes de suites géométriques, on factorise par le terme de plus petit indice puis on change d'indice pour faire partir la somme de 0 (le changement d'indice se trouve tout seul après factorisation) :

$$\sum_{k=3}^{n-1} q^k = q^3 \sum_{k=3}^{n-1} q^{k-3} \overset{\text{cht d'indice} j=k-3}{=} q^3 \sum_{k=0}^{n-4} q^k = q^3 \frac{1-q^{n-3}}{1-q}.$$

2) (Vu en cours), On utilise d'abord la linéarité pour sortir les termes "parasites" :

$$\sum_{k=1}^{100} 2a^{3k+1} + 2 = 2a \sum_{k=1}^{100} a^{3k} + 2 \sum_{k=1}^{100} 1$$

Il nous reste juste à remarquer que $a^{3k} = (a^3)^k$ et on procède comme à la question précédente.

3)

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{(k+1)!} &\overset{\text{On ajoute 0}}{=} \sum_{k=1}^{n} \frac{k+1-1}{(k+1)!} \\ &= \sum_{k=1}^{n} \frac{k+1}{(k+1)!} - \frac{1}{k!} \\ &\overset{(k+1)!=(k+1)k!}{=} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} - \frac{1}{(k+1)!} \\ &\overset{\text{Télescopage}}{=} 1 - \frac{1}{(n+1)!}.\end{aligned}$$

4)

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \frac{1}{n+1-k} &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+1-k} \\ &\overset{\text{chgt d'indice par renversement} j=n+1-k}{=} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j} = 0.\end{aligned}$$

5) Même principe que 3), $k \times k! = (k+1-1) \times k! = (k+1)! - k!$ puis Télescopage.

6) Développer le produit puis utiliser la linéarité pour se ramener à $\sum_{k=1}^n k^2 + \sum_{k=1}^n k$.

7) Linéarité.

8) On verra une autre façon de faire cet exercice en DM mais on avait donné en TD l'indication de faire le changement d'indice $j = k+1$. Remarque : Si $q = 0$, on a $S = 0$. On peut donc regarder ce qui se passe pour $q \neq 0$ (et donc utiliser q^{-1}) :

$$\begin{aligned}S = \sum_{k=1}^{n} kq^k &= \sum_{j=2} n+1 (j-1) q^{j-1} \\ &\overset{\text{Linéarité}}{=} q^-1 [\sum_{j=2}^{n+1} jq^j - \sum_{j=2}^{n+1} q^j] \\ &=\end{aligned}$$

9) $\sum_{k=0}^n 2^k 3^{n-k} = 3^n \sum_{k=0}^n \frac{2}{3}^k = 3^n \frac{1-\frac{2}{3}^{n+1}}{1-\frac{2}{3}}$.

10) Vu en TD.

11) On sépare la somme en 2 en utilisant la relation de Chasles pair/impair.

12) Voir question 8).

13)

$$\begin{aligned}S = \sum_{k=0}^{n} cos^2(\frac{k\pi}{2n}) &\overset{\text{Renversement} j=n-k}{=} \sum_{j=0}^{n} cos^2(\frac{(n-j)\pi}{2n}) \\ &= \sum_{j=0}^{n} cos^2(\frac{pi}{2} - \frac{j\pi}{2n}) \\ &\overset{\text{Formule trigo}}{=} (\sum_{j=0}^{n} sin^2(\frac{j\pi}{2n}))\end{aligned}$$

On a réécrit S comme la même somme mais en remplaçant cos^2 par sin^2. Les afficionados de la trigonométrie doivent se douter qu'on va alors utiliser le fait que pour tout x dans $\mathbb{R}$, $sin^2(x)+cos^2(x)=1$.Pour ceci :

$$2S = S+S = \sum_{k=0}^{n} cos^2(\frac{k\pi}{2n}) + sin^2(\frac{k\pi}{2n}) = \sum_{k=0}^{n} 1 = (n+1).$$

Donc $S = \frac{n+1}{2}$.

14) Multiplier par la quantité conjuguée puis reconnaître un télescopage.

5

1) On va calculer la différence de somme de 2 manières différentes : Méthode 1 :

$$\sum_{k=1} n(k+1)^2 - \sum_{k=1}^{n} k^2 = \sum_{k=1}^{n}(k+1)^2 - k^2 \overset{\text{Télescopage}}{=} (n+1)^2 - 1^2 = n^2+2n$$

Méthode 2 :

$$\sum_{k=1} n(k+1)^2 - \sum_{k=1}^{n} k^2 = \sum_{k=1}^{n}(k+1)^2 - k^2 \overset{\text{Identité remarquable}}{=} \sum_{k=1}^{n}(k+1+k)(k+1-k) = \sum_{k=1}^{n} 2k+1 = 2\sum_{k=1}^{n} k + \sum k = 1^n 1 = 2S_1(n)+n.$$

On a donc $2S_1(n)+n = n^2+2n$ ce qui donne assez rapidement $S_1(n) = \frac{n(n+1)}{2}$.

2) Je ne détaille pas en entier mais la méthode est exactement la même.On va regarder $\sum_{k=1}^{n}(k+1)^3 - k^3$ et $\sum_{k=1}^{n}(k+1)^4 - k^4$ de 2 manières. Pour 1 méthode on calcule par télescopage, pour l'autre on a besoin de la factorisation de $a^3 - b^3$ ou de $a^4 - b^4$ vue dans le cours.

6

1) On va effectuer notre première décomposition en élément simple (qui consiste exactement à fragmenter les fractions ayant un produit au dénominateur). Pour cela on va effectuer la méthode la plus générique dite d'identification :

Soit $k \in \mathbb{N}^*$ et $(a,b,c) \in R^3$ tels que $\frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{a}{k} + \frac{b}{k+1} + \frac{c}{k+2}$. En passant au même dénominateur dans le membre de droite on a alors que :

$$\frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{(a+b+c)k^2 + (3a+2b+c)k + 2a}{k(k+1)(k+2)}$$

. Ou encore, en multipliant par $k(k+1)(k+2)$ des deux côtés :

$$0 \times k^2 + 0 \times k + 1 \times 1 = (a+b+c)k^2 + (3a+2b+c)k + 2a \times 1$$

.

La méthode par identification revient alors à dire que les termes en k^2, en k et en 1 sont égaux des deux côtés. On obtient alors une résolution de système :
$0 = a+b+c$
$0 = 3a+2b+c$
$1 = 2a$.
En résolvant le système on obtient $a = \frac{1}{2}, b = -1, c = \frac{1}{2}$.
Au final on a donc $u_k = \frac{1}{2k} - \frac{1}{k+1} + \frac{1}{2(k+2)}$.

2) D'après ce qui précède, et en réécrivant un tout petit peu,

$$u_k = \frac{1}{2}(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}) + \frac{1}{2}(\frac{1}{k+2} - \frac{1}{k+1}).$$

En séparant la somme en 2 on reconnaît alors 2 télescopages.

7 On doit montrer une équivalence entre 2 propositons(si et seulement si). On utilise alors une preuve par double implication. Supposons d'abord que n est impair. Alors $(-1)^n = -1$ et donc $2^n + 1 = 2^n - (-1) = 2^n - (-1)^n$.
On peut alors utiliser la formule de factorisation du cours qui nous donne :

$$2^n + 1 = (2-(-1))\sum_{k=0}^{n-1} 2^k(-1)^{n-k} = 3\sum_{k=0}^{n-1} 2^k(-1)^{n-k}.$$

En notant $M = \sum_{k=0}^{n-1} 2^k(-1)^{n-k}$, on a que M est un entier et que $2^n + 1 = 3M$ donc 3 divise M, ce qui conclut un sens de l'implication.
Pour l'autre implication, on va raisonner par contraposition. Soit n un nombre pair. On veut montrer que 3 ne divise pas $2^n + 1$.

Comme n est pair,$n=2k$ avec $k\in\mathbb{N}$.
Donc $2^n+1=2^{2k}+1=4^k+1$. Pour conclure cette question on a besoin d'avoir vu des notions d'arithmétique comme les congruences, vous pouvez donc passer ce passage en première lecture :
$4\equiv 1 \pmod 3$ donc $4^k\equiv 1^k \pmod 3$, et donc $4^k+1\equiv 2 \pmod 3$ donc 3 ne divise pas 4^k+1 et à fortiori 3 ne divise pas 2^n+1.
On a prouvé le sens contraire par contraposition, on a donc bien équivalence entre "n impair" et "3 divise 2^n+1".

8 Vu en TD pour la plupart, je rajouterais les autres plus tard.

9

$$S=\sum_{p=0}^{n-1}\sum_{k=0}^{m}\binom{n}{p}k^p \overset{\text{Inversion de sommes}}{=} \sum_{k=0}^{m}\sum_{p=0}^{n-1}\binom{n}{p}k^p$$

On voit qu'on a presque un binôme de Newton mais il nous manque le terme d'indice n. Comme d'habitude, on le rajoute et on l'enlève (on ajoute 0).

$$S=\sum_{k=0}^{m}[(\sum_{p=0}^{n}\binom{n}{p}k^p 1^{n-p})-k^n]$$
$$\overset{\text{binôme de Newton}}{=}\sum_{k=0}^{m}[(k+1)^n-k^n]$$
$$\overset{\text{Télescopage}}{=}(m+1)^n-0=(m+1)^n.$$

10 Vu en cours

11 Par le théorème de produit de sommes, on a que

$$\sum_{1\le i,j\le n} ij=\sum_{i=1}^{n} i\times\sum_{j=1}^{n} j=[\frac{n(n+1)}{2}]^2.$$

12 Vu en TD

13 Vu en TD

14 Vu en TD

15

1) $\prod_{1\le k\le n}(n+k)=(n+1)(n+2)\cdots(2n)=\frac{1\times 2\times\cdots(2n)}{1\times 2\times\cdots n}=\frac{(2n)!}{n!}$.

2) Initialisation : OK
Hérédité :On suppose la propriété vraie au rang n.
On pose $P_{n+1}=\prod_{k=1}^{n+1}(4k-2)$.

$$P_{n+1}=\prod_{k=1}^{n+1}(4k-2)=\prod_{k=1}^{n}(4k-2)(4(n+1)-2)$$
$$\overset{\text{(HR)}}{=}[\prod_{1\leqslant k\leqslant n}(n+k)](4n+2)$$
$$\overset{\text{chgt indice}\, j=k-1}{=}[\prod_{0\leqslant j\leqslant n-1}(n+j+1)](4n+2)$$

On sent qu'on est proche mais il nous reste à enlever le terme en $j=0$ et à rajouter les termes en $j=n$ et en $j=n+1$, ce qu'on fait en multipliant et en divisant par ces termes là (On mutliplie par 1 !) :

$$P_{n+1}=(4n+2)\frac{(n+1)}{(2n+1)(2n+2)}[\prod_{1\leqslant j\leqslant n+1}(n+j+1)]$$

Or $(4n+2)\frac{(n+1)}{(2n+1)(2n+2)}=1$ donc $P_{n+1}=\prod_{1\leqslant j\leqslant n+1}(n+j+1)$ ce qui montre la proposition au rang $(n+1)$.
On conclut par théorème de récurrence.

3) Factoriser $4k-2$ par 2 et se rendre compte qu'on va retrouver le produit des nombres impairs entre 1 et $(2n-1)$ qu'on a calculé à peu de choses prêt dans l'exercice 12 question 2.

16

1) Pour $a=1$, $P_n=\prod_{k=0}^{n}(1+1)=2^{n+1}$.

2) Le prouver par récurrence en utilisant une identité remarquable pour l'hérédité.

3) Il suffit de diviser l'égalité précédente par $(1-a)$ et on obtient :

$$P_n=\frac{1-a^{2^{n+1}}}{1-a}.$$

17 Non fait pour l'instant.

18 Faire apparaître $\binom{k}{n+1}$ dans la somme en multipliant et divisant par $n!$(On multiplie par 1 !) puis utiliser le théorème du binôme de Newton.

19 Vu en TD

20 On remarque que pour $i > j$, $\binom{i}{j} = 0$. Donc on a :

$$S_n = \sum_{0\leq i,j\leq n} \binom{i}{j} = \sum_{0\leq j\leq i\leq n} \binom{i}{j}$$

$$= \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{i} \binom{i}{j}$$

$$\overset{\text{Binôme de Newton}}{=} \sum_{i=0}^{n} 2^i = \frac{1-2^{n+1}}{1-2} = 2^{n+1} - 1.$$

21

1) $(1+x)^2n$ peut se développer directement par la méthode du binôme de Newton ou on remarque que $((1+x)^n)^2$. On a donc :

$$(1+x)^2n = \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} x^k 1^{2n-k}$$

et

$$(1+x)^2n = ((1+x)^n)^2 = [\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k 1^{n-k}][\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k 1^{n-k}]$$

2) Très dûr (ne pas hésiter à passer cette seconde partie). Il faut identifier le coefficient devant x^n dans les 2 façons d'écrire $(1+x)^{2n}$. Dans la première c'est $\binom{2n}{n}$.
Dans la deuxième pour avoir du x^n en faisant le produit des 2 sommes, il faut avoir un terme en x^k pour la première somme et en x^{n-k} pour la deuxième et ceci pour tous les k entre 0 et n.
On a donc $\binom{2n}{n} = \sum k = 1^n \binom{n}{k} \times \binom{n}{n-k}$. On conclut en remarquant que par symétrie, $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.

22

$$A_n + B_n \overset{\text{Chasles pair/impair}}{=} \sum k = 0^n \binom{n}{k} = 2^n$$

$$A_n - B_n \overset{\text{Chasles pair/impair}}{=} \sum k = 0^n (-1)^k \binom{n}{k} = (1-1)^n = 0.$$

On a donc un système simple à résoudre et on trouve $A_n = B_n = 2^{n-1}$.

23 On raisonne par récurrence sur n : Soit $n \geq p$ et $P(n)$ la proposition " $\sum_{k=p}^{n} \binom{k}{p} = \binom{n+1}{p+1}$".

Initialisation :

$P(p)$ s'écrit $\binom{p}{p} = \binom{p+1}{p+1}$ or $\binom{p}{p} = 1 = \binom{p+1}{p+1}$ donc $P(p)$ est vraie.

Hérédité :

On suppose la propriété vraie au rang n.

$$\sum_{k=p}^{n+1} \binom{k}{p} = (\sum_{k=p}^{n} \binom{k}{p}) + \binom{n+1}{p}$$

$$\overset{\text{Hypothèse de récurrence !}}{=} \binom{n}{p} + \binom{n+1}{p}$$

$$\overset{\text{Formule de Pascal}\binom{n+1}{p+1}.}{=}$$

On a donc prouvé la proposition au rang $n+1$.
Par théorème de récurrence, $P(n)$ est vraie pour tout $n \geq p$.

24 La question 1) a été vue en TD (on utilise la formule d'additivité/formule de Pascal et on fait apparaître un télescopage). La question 2) est dans le corrigé du DS.