Problème n° 1

Autour de l'inégalité de Cauchy Schwarz

Soit $a_1, \dots, a_n$ et $b_1, \dots, b_n$ des réels. On veut démontrer que :

$$\left|\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right| \leqslant \sqrt{\sum_{k=1}^{n} a_k^2}\sqrt{\sum_{k=1}^{n} b_k^2} (\bigstar)$$

1) Pour $\lambda \in \mathbb{R}$, on pose $P(\lambda) = \sum_{k=1}^{n}(a_k - \lambda b_k)^2$. Montrer que P est un polynôme du second degré en λ. On explicitera ses coefficients.

2) Montrer que P est toujours positif. En déduire l'inégalité $(\bigstar)$.

3) On étudie le cas d'égalité dans l'inégalité $(\bigstar)$. On suppose que :

$$\left|\sum_{k=1}^{n} a_i b_k\right| = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} a_k^2}\sqrt{\sum_{k=1}^{n} b_k^2}$$

   a) Prouver qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}, P(\lambda) = 0$.

   b) Montrer que si la somme de n termes positifs est nulle alors tous les termes de la somme sont nuls (On demande une vraie justification).

   c) En déduire que

$$\left|\sum_{k=1}^{n} a_i b_k\right| = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} a_k^2}\sqrt{\sum_{k=1}^{n} b_k^2}$$

   si et seulement si on a soit $b_k = 0$ pour tout $k \in [\![1, n]\!]$ ou si il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $a_k = \lambda b_k$.

4) Application : Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ Démontrer que

$$\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)^2 \leq n\sum_{k=1}^{n} x_k^2$$

et étudier les cas d'égalité.

Remarque : Le cas que nous venons d'étudier est en fait un cas particulier d'une inégalité de Cauchy Schwarz plus générale portant sur le produit scalaire, que nous reverrons lorsque nous traiterons le chapitre "Espaces préhilbertiens" au second semestre.

Problème n° 2

L'intégration par partie pour les sommes : La sommation d'Abel
Soient $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de nombres complexes. On définit deux suites $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en posant :

$$A_n = \sum_{k=0}^{n} a_k, \quad b_n = B_{n+1} - B_n$$

1) Démontrer que $\sum_{k=0}^{n} a_k B_k = A_n B_n - \sum_{k=0}^{n-1} A_k b_k$.

2) En déduire la valeur de $\sum_{k=0}^{n} 2^k k$.

Problème n° 3

Dans cet exercice, on souhaite déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vérifiant la relation suivante :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) + xf(1-x) = 1 + x$$

1) On considère f une fonction satisfaisant la relation précédente. Que vaut $f(0)$? $f(1)$?

2) Soit $x \in \mathbb{R}$. En substituant x par $1-x$ dans la relation, déterminer $f(x)$.

3) Quelles sont les fonctions f solution du problème ?

Devoir maison n°1 (Pour le 27/09/2024)

Problème n° 4

1) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R}^n$.
Montrer que :

$$\sum_{k=0}^{n} a_k = \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} a_{2j} + \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} a_{2j+1}$$

2) Montrer qu'il existe $(a_n, b_n) \in (\mathbb{N}^*)^2$ tel que $(2+\sqrt{3})^n = a_n + b_n\sqrt{3}$

3) Par le même calcul, exprimer $(2-\sqrt{3})^n$ en fonction de a_n et b_n.

4) Montrer que $3b_n^2 = z = a_n^2 - 1$

5) Encadrer $(2-\sqrt{3})^n$ entre 2 entiers.

6) En considérant $(2+\sqrt{3})^n + (2-\sqrt{3})^n$, montrer que $\lfloor (2+\sqrt{3})^n \rfloor$ est un entier impair.

Problème n° 5

(BONUS : Pour les **très** motivés) Montrer que pour $n \in \mathbb{N}, E\left(\frac{1}{3}\left(n+2-E\left(\frac{n}{25}\right)\right)\right) = E\left(\frac{8n+24}{25}\right)$.