Chapitre 3 : Inégalités sur $\mathbb{R}$

A) Règles de calculs

- Définitions inégalités
- Manipulation élémentaires (sommes d'inégalités, produits d'inégalités, produit par un réel positif/négatif,inverse,...)
- Encadrement d'inégalités élémentaires.

B)Lien entre fonctions et inégalités

- Application d'une fonction croissant/str croissante/décroissante/str décroissante à une inégalité.
- Fonctions croissantes classiques : $\exp, \ln, x \mapsto x^2, \sin, \sqrt{}, ..$
- Exemples : Résoudre sur $\mathbb{R}_+^*$ l'équation $\ln(2x+1) < \ln(x) + 1$).

C) La fonction valeur absolue

- Définition,Interprétation sous forme de distance
- Premières propriétés
- Exemple de résolution d'inégalités avec valeurs absolues en utilisant des disjonctions de cas (Résoudre sur $\mathbb{R}$, $|4x-2| \leq |x-1|$.)
- Valeur absolue du quotient, du produit du carré, de la puissance,...
- Application : a et b positifs, Montrer que $|\sqrt{a}-\sqrt{b}| \leq \sqrt{|a-b|}$.
- Inégalité triangulaire généralisé + cas d'égalité.
- Majoration d'une somme quelconque]

D) La fonction partie entière

- Définition : Soit $x \in \mathbb{R}$, $\lfloor x \rfloor$ est l'unique entier tel que $\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1$
- Définition partie entière supérieure
- Propriétés de la partie entière :
  Pour $x \in \mathbb{R}$,
  (a) $x - 1 < \lfloor x \rfloor \leq x$.
  (b) $\lfloor x \rfloor = \lceil x \rceil \Leftrightarrow x \in \mathbb{Z}$.
  (c) $\lfloor x \rfloor$ est le plus grand entier n vérifiant $n \leq x$.
  (d) La fonction partie entière est croissante.

E) Parties majorées, minorées, minimum et maximum

- Définition parties majorées, parties minorées,partie bornée.

Chapitre 4 : Fonctions de la variables réelle

A) Généralités sur les fonctions

- Définition de la notion de fonction, espace de départ (l'espace d'arrivée est pour l'instant fixé à $\mathbb{R}$ ou événtuellement un sous-ensemble de $\mathbb{R}$).
- Domaine de définition d'une fonction.
- Réprésentation graphique, premiers exemple (la représentation graphique est vue comme une aide à l'intuition.)
- Opérations sur les fonctions (sommes, produits,quotients,composées)
- Fonctions paires/impaires : Def, propriétés, lien avec la représentation graphique
- Fonctions périodiques(def,ex du sin,cos,$x \mapsto x - \lfloor x \rfloor$, la définition de période minimale n'a pas été abordé, lien avec la représentation graphique.)
- Foncttions croissantes, décroissantes, str croissantes, str décroissantes, monotones...
- Fonctions majorées, minorées, admettant un maximum, un minimum...
- Asymptotes verticales, horizontales, obliques (le calcul de limite en lui même n'a pas été trop exploré pour l'instant.)
- Perturbations de fonctions et leut impact sur la représentation graphique (translations,symétries,...)

B) Dérivabilité d'une fonction de la variable réelle

- Notion de fonction dérivable, nombre dérivée, équation de la tangente
- Opérations sur les fonctions dérivables (sommes, produit, quotient, composées,..)
- Rappel des dérivées classiques.
- La dérivée d'une fonction périodique est périodique, la dérive d'une fonction paire/impaire est impaire/paire.

Questions de cours :

Tous les étudiants doivent être capable de redonner les définitions du Chapitre 3 et 4 avec des quantificateurs.

- Preuve de l'inégalité triangulaire généralisée : Montrer que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $||x| - |y| \leq |x+y| \leq |x| + |y|$. et rappeler,sans le montrer, le cas d'égalité de $|x+y|$ et $|x|+|y|$. (Vu Lundi 22)

- Preuve de propriétés de la fonction partie entière (inférieure) à partir de la définition (**Qu'on rappellera !**) :
  Soit $x \in \mathbb{R}$,
  i. Montrer que $x - 1 < \lfloor x \rfloor \leq x$.
  ii. Montrer que la fonction partie entière est croissante.
  iii. Montrer que $\lfloor x \rfloor = x \Longleftrightarrow x \in \mathbb{Z}$.
- Pour f et g 2 fonctions monotones de même monotonie.
  1) Montrer que $f + g$ est monotone.
  2) Montrer que si f et g sont positives alors fg est monotone de même monotonie que f et g. On donnera un contre-exemple quand f et g ne sont pas positives et quand f et g ne sont pas de même monotonie.
  3) Si $g \circ f$ est définie, discuter de la monotonie de $g \circ f$ en fonction de leur monotonie respectives (on prouvera 1 des 4 cas).
- On montrera les 3 propriétés suivantes :
  1) Si f est périodique de période T alors pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, kT est une période de f.
  2) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\lfloor x+1 \rfloor = \lfloor x \rfloor + 1$
  3) Montrer que $x \mapsto x - x\rfloor$ est 1-périodique.