L'usage de la calculatrice est interdit. Les raisonnements présentés devront être soigneusement justifiés et détaillés, quelques points seront dédiés à la présentation, l'orthographe et la propreté de votre copie. En particulier, ***il est IMPERATIF de souligner les résultats obtenus****. Il n'est pas nécessaire de répondre à l'ensemble des questions pour avoir une bonne note. Si vous ne parvenez pas à résoudre une question, vous pouvez admettre le résultat dans la suite de l'énoncé.Lisez bien tout le sujet avant de commencer et identifiez les parties plus simples pour vous, et commencez par ces parties.*

I Questions préliminaires

Dans ce devoir, j'indique par une ★ les questions plus longues ou plus difficiles que la moyenne mais qui seront également plus valorisées en terme de notation.

Exercice n° 1

1)
2)
3)
4)
5)
6)
7)
8)
9)
10)
11)
12)
13)
14)
15)

Exercice n°2

1)
2)
3) a)
b)
c)

Exercice n°3

1) On a $P_n(0) = 1$ (on ne fait que des produits de 1), $P_n(-n) = 0$, car alors

$$1 + \frac{-n}{n} = 0$$

et donc on a un terme nul dans le produit. Enfin,

$$P_n(1) = \prod_{k=1}^{n} \frac{k+1}{k} = \frac{2 \times 3 \times \cdots \times (n+1)}{1 \times 2 \times \cdots \times n} = n+1$$

2) On a

$$\begin{aligned}
P_n(x) &= \prod_{k=1}^{n} \frac{x+k}{k} \\
&= \frac{(x+1)(x+2)\dots(x+n)}{1 \times 2 \times \cdots \times n} \\
&= \frac{x+n}{x} \times \frac{(x-1+1)(x-1+2)\dots(x-1+n)}{1 \times 2 \times \cdots \times n} \\
&= \frac{x+n}{x} P_n(x-1)
\end{aligned}$$

3) On a

$$P_n(p) = \prod_{k=1}^{n} \frac{k+p}{k} = \frac{(p+1)\dots(p+n)}{n!} = \frac{(n+p)!}{n!p!} = \binom{n+p}{p}$$

Exercice n°4

1)
2)
3)

II Problèmes

Problème n° 1

Introduction à la série harmonique

1)
2)
3) On calcule $u_{n+1} - u_n = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \frac{1}{n+1} \geq 0$. On conclut donc La suite (u_n) est croissante.
4) On a

$$\begin{aligned} u_{2n} - u_n &= \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \\ &= \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \end{aligned}$$

On remarque de plus que

$$\forall k \in [\![n+1, 2n]\!], \quad \frac{1}{k} \geq \frac{1}{2n}$$

Il en résulte que

$$u_{2n} - u_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \geq \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{2n} = n\frac{1}{2n} = \frac{1}{2}$$

Il en résulte que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_{2n} - u_n \geq \frac{1}{2}$$

5) Supposons que (u_n) converge vers une limite finie ℓ, on a donc $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$ et $u_{2n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$ puis par opérations ur les limites, $u_{2n} - u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. On obtient donc une contradiction avec l'inégalité de la question précédente. On conclut

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$$

6) On a $w_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
7) En regroupant, tout au même dénominateur, on obtient

$$\frac{a}{n} + \frac{b}{n+1} + \frac{c}{2n+1} = \frac{(2a+2b+c)n^2 + (3a+b+c)n + a}{n(n+1)(2n+1)}$$

Pour que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{1}{n(n+1)(2n+1)} = \frac{a}{n} + \frac{b}{n+1} + \frac{c}{2n+1}$$

il suffit donc que $(2a+2b+c) = 0, (3a+b+c) = 0$ et $a = 1$, on résout et on trouve $a = b = 1$ et $c = -4$. On conclut que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{1}{n(n+1)(2n+1)} = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} - \frac{4}{2n+1}.$$

8) Première méthode, par récurrence, un peu lourd, mais cela marche. Seconde méthode :

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2k+1} &= \underbrace{\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2k+1}+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2k}}_{\text{(tous les termes de la forme } \frac{1}{k} \text{ pour } k \text{ comprise entre 2 et } 2n+1.)} - \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2k}\\ &= \sum_{k=2}^{2n+1}\frac{1}{k}-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\\ &= \sum_{k=1}^{2n}\frac{1}{k}-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}+\frac{1}{2n+1}-1\\ &= u_{2n}-\frac{1}{2}u_n-1+\frac{1}{2n+1}\end{aligned}$$

On conclut

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\quad \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2k+1}=u_{2n}-\frac{1}{2}u_n-1+\frac{1}{2n+1}$$

9) En utilisant la question 6 , on a

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{6}{k(k+1)(2k+1)}$$

Utilisant les question 6 et 7 , on en déduit

$$\begin{aligned}S_n &= 6\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}+\frac{1}{k+1}-\frac{4}{2k+1}\\ &= 6\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}+6\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k+1}-24\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2k+1}\\ &= 6u_n+6\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-1+\frac{1}{n+1}\right)-24\left(u_{2n}-\frac{1}{2}u_n-1+\frac{1}{2n+1}\right)\\ &= -24u_{2n}+24u_n+18+\frac{6}{n+1}+\frac{1}{2n+1}\end{aligned}$$

On conclut

$$S_n=-24u_{2n}+24u_n+18+\frac{6}{n+1}+\frac{1}{2n+1}$$

Problème n° 2

Autour des coefficients binomiaux

Partie 0 : Rappel du cours

1)

2)

Partie I : Calcul d'une somme

3) On utilise un raisonnement par récurrence. $\star$ On a :

$$\sum_{k=0}^{0}k^3=0^3=0 \quad \text{et} \quad \frac{0^2(0+1)^2}{4}=0$$

donc l'égalité est vraie pour $n=0$. $\star$ Soit $n\in\mathbb{N}$. Supposons que $\sum_{k=0}^{n}k^3=\frac{n^2(n+1)^2}{4}$. Montrons que $\sum_{k=0}^{n+1}k^3=\frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}$. On a :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n+1} k^3 &= \sum_{k=0}^{n} k^3 + (n+1)^3 \quad \text{(relation de Chasles)}\\
&= \frac{n^2(n+1)^2}{4} + (n+1)^3 \quad \text{(hypothèse de récurrence)}\\
&= \frac{n^2(n+1)^2 + 4(n+1)\times(n+1)^2}{4}\\
&= \frac{(n+1)^2\left(n^2+4n+4\right)}{4}\\
&= \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}
\end{aligned}$$

L'égalité est donc vraie au rang $n+1$.

4) a) Soient $k\in\mathbb{N}$ et $\ell\in[\![0,k-1]\!]$. On a (puisque $0\leqslant \ell+1\leqslant k\leqslant k+1$) :

$$\begin{aligned}
\binom{k+1}{\ell+1}-\binom{k}{\ell+1} &= \frac{(k+1)!}{(\ell+1)!(k-\ell)!} - \frac{k!}{(\ell+1)!(k-\ell-1)!}\times\frac{\boldsymbol{k-\ell}}{\boldsymbol{k}-\ell}\\
&= \frac{(k+1)k!-(k-\ell)k!}{(\ell+1)!(k-\ell)!}\\
&= \frac{(\ell+1)k!}{(\ell+1)!(k-\ell)!}\\
&= \frac{k!}{\ell!(k-\ell)!}\\
&= \binom{k}{\ell}
\end{aligned}$$

Par ailleurs, l'égalité est évidente si $\ell=k$; en effet, $\binom{k}{k+1}=0$ donc les deux nombres mis en jeu dans l'égalité sont égaux à 1 . Finalement :

$$\forall k\in\mathbb{N}, \forall \ell\in[\![0,k]\!],\quad \binom{k}{\ell}=\binom{k+1}{\ell+1}-\binom{k}{\ell+1}$$

b) Soient $\ell,n\in\mathbb{N}$ tels que $\ell\leqslant n$. D'après la question précédente, on a :

$$\sum_{k=\ell}^{n}\binom{k}{\ell}=\sum_{k=\ell}^{n}\left[\binom{k+1}{\ell+1}-\binom{k}{\ell+1}\right]=\binom{n+1}{\ell+1}-\binom{\ell}{\ell+1}$$

car la somme est télescopique. Or $\binom{\ell}{\ell+1}=0$ car $\ell+1>\ell$ donc :

$$\sum_{k=\ell}^{n}\binom{k}{\ell}=\binom{n+1}{\ell+1}$$

Soient $\ell,n\in\mathbb{N}$ tels que $\ell\leqslant n$. D'après la question précédente, on a :

$$\sum_{k=\ell}^{n}\binom{k}{\ell}=\sum_{k=\ell}^{n}\left[\binom{k+1}{\ell+1}-\binom{k}{\ell+1}\right]=\binom{n+1}{\ell+1}-\binom{\ell}{\ell+1}$$

car la somme est télescopique. Or $\binom{\ell}{\ell+1}=0$ car $\ell+1>\ell$ donc :

$$\sum_{k=\ell}^{n}\binom{k}{\ell}=\binom{n+1}{\ell+1}$$

c) Pour tout entier k supérieur ou égal à 3 , on a :

$$\binom{k}{3}=\frac{k!}{3!(k-3)!}=\frac{k(k-1)(k-2)}{6}$$

et cette égalité reste vraie si $k\in\{0,1,2\}$ car, dans ce cas, on a $\binom{k}{3}=0$ (le membre de droite ci-dessus étant également nul). Ainsi :

$$\forall k\in\mathbb{N},\quad \binom{k}{1}=k,\quad \binom{k}{2}=\frac{k(k-1)}{2}\quad \text{et}\quad \binom{k}{3}=\frac{k(k-1)(k-2)}{6}$$

d) Soient $a, b, c, k \in \mathbb{N}$. On a :

$$\begin{aligned} a\binom{k}{3}+b\binom{k}{2}+c\binom{k}{1} &= a\frac{k(k-1)(k-2)}{6}+b\frac{k(k-1)}{2}+ck \\ &= \frac{a\left(k^3-3k^2+2k\right)}{6}+\frac{b\left(k^2-k\right)}{2}+ck \\ &= \frac{a}{6}k^3+\left(\frac{b}{2}-\frac{a}{2}\right)k^2+\left(\frac{a}{3}-\frac{b}{2}+c\right)k \end{aligned}$$

Ainsi, pour que l'égalité $a\binom{k}{3}+b\binom{k}{2}+c\binom{k}{1}=k^3$ soit vraie, il suffit que a, b et c soient tels que :

$$\left\{\begin{array}{c} \frac{a}{6}=1 \\ \frac{b}{2}-\frac{a}{2}=0 \\ \frac{a}{3}-\frac{b}{2}+c=0 \end{array}\right. \quad \text{i.e.} \quad \left\{\begin{array}{c} a=6 \\ b=a=6 \\ c=\frac{b}{2}-\frac{a}{3}=1 \end{array}\right.$$

Finalement :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad k^3=6\binom{k}{3}+6\binom{k}{2}+\binom{k}{1}$$

e) Soit $n \in \mathbb{N}$. En sommant les égalités obtenues à la question précédente, il vient :

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n} k^3=\sum_{k=0}^{n}\left(6\binom{k}{3}+6\binom{k}{2}+\binom{k}{1}\right) &= 6\sum_{k=0}^{n}\binom{k}{3}+6\sum_{k=0}^{n}\binom{k}{2}+\sum_{k=0}^{n}\binom{k}{1} \\ &= 6\sum_{k=3}^{n}\binom{k}{3}+6\sum_{k=2}^{n}\binom{k}{2}+\sum_{k=1}^{n}\binom{k}{1} \\ &= 6\binom{n+1}{4}+6\binom{n+1}{3}+\binom{n+1}{2} \end{aligned}$$

d'après la formule du triangle de Pascal généralisée (question 2.(b)). En explicitant les coefficients binomiaux, on obtient :

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n} k^3 &= 6\times\frac{(n+1)n(n-1)(n-2)}{24}+6\times\frac{(n+1)n(n-1)}{6}+\frac{n(n+1)}{2} \\ &= n(n+1)\frac{(n-1)(n-2)+4(n-1)+2}{4} \\ &= n(n+1)\frac{n^2+n}{4} \\ &= \frac{n^2(n+1)^2}{4} \end{aligned}$$

Ainsi : on retrouve bien l'égalité (*)

Partie II : Formule d'inversion de Pascal

1) Soient $n, k, \ell \in \mathbb{N}$ tels que $\ell \leqslant k \leqslant n$. On a :

$$\begin{aligned} \binom{n}{k}\binom{k}{\ell}=\frac{n!}{k!(n-k)!}\times\frac{k!}{\ell!(k-\ell)!} &= \frac{n!}{(n-k)!\ell!(k-\ell)!} \\ &= \frac{n!}{\ell!(n-\ell)!}\times\frac{(n-\ell)!}{(k-\ell)!((n-\ell)-(k-\ell))!} \\ &= \binom{n}{\ell}\binom{n-\ell}{k-\ell} \end{aligned}$$

Ainsi : □

$$\forall n, k, \ell \in \mathbb{N}, \quad \ell \leqslant k \leqslant n \Longrightarrow \binom{n}{k}\binom{k}{\ell}=\binom{n}{\ell}\binom{n-\ell}{k-\ell}$$

2) Soient $n, \ell \in \mathbb{N}$ tels que $\ell \leqslant n$. D'après la question précédente, on a :

$$\begin{aligned}
S_{n,\ell} = \sum_{k=\ell}^{n} (-1)^{k-\ell}\binom{n}{\ell}\binom{n-\ell}{k-\ell} = \binom{n}{\ell}\sum_{k=\ell}^{n}\binom{n-\ell}{k-\ell}(-1)^{k-\ell} &= \binom{n}{\ell}\sum_{j=0}^{n-\ell}\binom{n-\ell}{j}(-1)^{j} \quad (\text{ changement d'indice } j=k-\ell)\\
&= \binom{n}{\ell}\sum_{j=0}^{n-\ell}\binom{n-\ell}{j}(-1)^{j}1^{n-\ell-j}\\
&= \binom{n}{\ell}0^{n-\ell}
\end{aligned}$$

Ainsi :

$$S_{n,\ell} = \begin{cases} 0 & \text{si } \ell < n \\ 1 & \text{si } \ell = n \end{cases}$$

3) Soit $n \in \mathbb{N}$. D'après les propriétés sur les sommes triangulaires, on a :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n+k}\binom{n}{k}b_k = \sum_{k=0}^{n}(-1)^{n+k}\binom{n}{k}\sum_{\ell=0}^{k}\binom{k}{\ell}a_\ell &= \sum_{k=0}^{n}\sum_{\ell=0}^{k}(-1)^{n+k}\binom{n}{k}\binom{k}{\ell}a_\ell\\
&= \sum_{0\leqslant \ell\leqslant k\leqslant n}(-1)^{n+k}\binom{n}{k}\binom{k}{\ell}a_\ell\\
&= \sum_{\ell=0}^{n}(-1)^{n+\ell}a_\ell\sum_{k=\ell}^{n}(-1)^{k-\ell}\binom{n}{k}\binom{k}{\ell}\\
&= \sum_{\ell=0}^{n}(-1)^{n+\ell}a_\ell S_{n,\ell}
\end{aligned}$$

En utilisant maintenant la question précédente, il vient :

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n+k}\binom{n}{k}b_k = \underbrace{\sum_{\ell=0}^{n-1}(-1)^{n+\ell}a_\ell \underbrace{S_{n,\ell}}_{=0}}_{=0} + \underbrace{(-1)^{2n}}_{=1}a_nS_{n,n} = a_n$$

Ainsi :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n = \sum_{k=0}^{n}(-1)^{n+k}\binom{n}{k}b_k$$

4) **Application.**

a) On utilise une récurrence simple. ⋆ On sait que $x_0 = 1$ donc :

$$\sum_{k=0}^{0}\binom{0}{k}x_k = \binom{0}{0}x_0 = 1 = 0!$$

L'égalité est donc vraie pour $n = 0$. ⋆ Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $n! = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x_k$. Montrons que $(n+1)! = \sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}x_k$. On a :

$$\begin{aligned}(n+1)! &= (n+1)\times n!\\
&= (n+1)\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x_k \quad \text{(hypothèse de récurrence)}\\
&= \sum_{k=0}^{n}(n+1)\binom{n}{k}x_k\\
&= \sum_{k=0}^{n}\binom{n+1}{k+1}(k+1)x_k \quad \text{(formule du pion)}\\
&= \sum_{k=0}^{n}\binom{n+1}{k+1}\left(x_{k+1}-(-1)^{k+1}\right) \quad \text{(relation de récurrence vérifiée par la suite)}\\
&= \sum_{\ell=1}^{n+1}\binom{n+1}{\ell}\left(x_\ell-(-1)^{\ell}\right) \quad \left(\text{changement d'indice } \ell=k+1\right)\\
&= \sum_{\ell=1}^{n+1}\binom{n+1}{\ell}x_\ell-\sum_{\ell=1}^{n+1}\binom{n+1}{\ell}(-1)^{\ell}\end{aligned}$$

D'après la formule du binôme de Newton, on a :

$$\sum_{\ell=1}^{n+1}\binom{n+1}{\ell}(-1)^{\ell}=\sum_{\ell=0}^{n+1}\binom{n+1}{\ell}(-1)^{\ell}-1=0^{n+1}-1=-1 \quad (\text{car}\, n+1>0)$$

donc :

$$(n+1)!=\sum_{\ell=1}^{n+1}\binom{n+1}{\ell}x_\ell+1=\sum_{\ell=0}^{n+1}\binom{n+1}{\ell}x_\ell$$

car $\binom{n+1}{0}x_0=1$. L'égalité est donc vraie au rang $n+1$.

b) Soit $n\in\mathbb{N}$. D'après ce qui précède (pour tout $k\in\mathbb{N}$, on a ici $a_k=x_k$ et $b_k=k!$) : $x_n=\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n+k}\binom{n}{k}k! = \sum_{k=0}^{n}(-1)^{n+k}\frac{n!}{(n-k)!}=n!\sum_{\ell=0}^{n}\frac{(-1)^{2n-\ell}}{\ell!}$ (changement d'indice $\ell=n-k$) Or $(-1)^{2n}=1$ et, pour tout $\ell\in[\![0,n]\!]$, on a $(-1)^{-\ell}=(-1)^{\ell}$ donc :

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad x_n=n!\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k!}$$