Chapitre 6 : Nombres complexes

A) L'ensemble des nombres complexes

- Définition de l'ensemble des nombres complexes
- i est le nombre complexe tel que $i^2 = -1$
- Unicité de la décomposition d'un complexe comme $x + iy, x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}$
- Partie réelle et partie imaginaire d'un nombre complexe (forme algébrique)
- Produit, somme, inverse dans les complexe
- Le binôme de Nexton,la formule de factorisation, la somme des termes d'une suite géométrique restent valables pour les complexes.
- $zz^{'} = 0 \Rightarrow z = 0$ ou $z \neq 0$.
- Représentation géométrique (affixe d'un point du plan, d'un vecteur du plan)

B) Conjugaison et module d'un nombre complexe

- Définition et interprétation géométrique du conjugué
- Conjugué produit, somme, inverse, quotient,...
- $\Re(z) = \frac{z+\overline{z}}{2}$ et $\Im(z) = \frac{z-\overline{z}}{2i}$.
- Conséquence : $z \in \mathbb{R} \Longleftrightarrow z = \overline{z}$ et $z \in i\mathbb{R}$(Imaginaire pur) $\Longleftrightarrow z = -\overline{z}$
- Exemple : $P(\overline{z}) = \overline{P(z)}$ pour P fonction polynomiale.
- Définition module d'un nombre complexe (2 définitions, avec Re et Im et avec les conjugués)
- Lien géométrique (description d'un cercle et d'un disque)
- Module du produit,du quotient, de l'inverse, du conjugué.
- Inégalité triangulaire sur les complexes, cas d'égalité
- Vision géométrique de l'inégalité triangulaire.

C)Nombres complexes de module 1

- Ensemble $\mathbb{U}$.
- produit d'éléments de $\mathbb{U}$, quotient.
- Inverse/conjugué d'éléments de $\mathbb{U}$.
- Pour $\theta \in \mathbb{R}$, introduction de la notation $e^{i\theta}$
- Premières propriétés
- produit, quotient, inverse d'éléments de la forme $e^{i\theta}, \theta \in \mathbb{R}$.
- Formule d'Euler, de l'angle moitié, de Moivre
- Application à la linéarisation

D) Forme trigonométrique et exponentielle complexe

- Définition argument
- Passage de la forme algébrique à la forme trigonométrique
- Lien entre représentation géométrique et forme trigonométrique
- Définition de l'exponentielle complexe, module et argument de $\exp(z)$.
- Exponentielle complexe d'une somme
- Résolution d'équations du type $\exp(z) = z^{'}, z, z^{'} \in \mathbb{C}$
- $\exp(z) = \exp(z^{'}) \Longleftrightarrow z = z^{'} + 2ik\pi, k \in \mathbb{Z}$
- Surjectivité de l'exponentielle complexe de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}^*$.

E)Résolutions d'équations algébrique dans $\mathbb{C}$

- Racines d'un nombre complexes (2 racines pour un nombre non nul)
- Tout nombre complexe a deux racines opposées
- Méthode trigonométrique et algébrique pour trouver les racines d'un nombre complexe (vu en cours Lundi 06/10)

Questions de cours :

- Preuve de l'inégalité triangulaire sur les complexes (i.e. $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}, |z_1 + z_2| \leq |z_1||z_2|$ + preuve du cas d'égalité de l'inégalité triangulaire.)
- Preuve de la formule d'Euler + Linéarisation de $\cos^5(\theta), \theta \in \mathbb{R}$.
- Preuve de la formule de Moivre et application au calcul de $\sin(4x)$ et $\cos(4x)$
- Preuve formules pour le module du produit,du quotient, et du conjugué de nombres complexes.
- Calcul de $C_n = \sum_{k=0}^{n} \cos(k\theta)$ pour $n \in \mathbb{N}$ et $\theta \in \mathbb{R}$.