Chapitre 6 : Nombres complexes

A) L'ensemble des nombres complexes

- Définition de l'ensemble des nombres complexes
- i est le nombre complexe tel que $i^2 = -1$
- Unicité de la décomposition d'un complexe comme $x + iy, x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}$
- Partie réelle et partie imaginaire d'un nombre complexe (forme algébrique)
- Produit, somme, inverse dans les complexe
- Le binôme de Nexton,la formule de factorisation, la somme des termes d'une suite géométrique restent valables pour les complexes.
- $zz^{'} = 0 \Rightarrow z = 0$ ou $z \neq 0$.
- Représentation géométrique (affixe d'un point du plan, d'un vecteur du plan)

B) Conjugaison et module d'un nombre complexe

- Définition et interprétation géométrique du conjugué
- Conjugué produit, somme, inverse, quotient,...
- $\Re(z) = \frac{z+\overline{z}}{2}$ et $\Im(z) = \frac{z-\overline{z}}{2i}$.
- Conséquence : $z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow z = \overline{z}$ et $z \in i\mathbb{R}$(Imaginaire pur) $\Leftrightarrow z = -\overline{z}$
- Exemple : $P(\overline{z}) = \overline{P(z)}$ pour P fonction polynomiale.
- Définition module d'un nombre complexe (2 définitions, avec Re et Im et avec les conjugués)
- Lien géométrique (description d'un cercle et d'un disque)
- Module du produit,du quotient, de l'inverse, du conjugué.
- Inégalité triangulaire sur les complexes, cas d'égalité
- Vision géométrique de l'inégalité triangulaire.

C)Nombres complexes de module 1

- Ensemble $\mathbb{U}$.
- produit d'éléments de $\mathbb{U}$, quotient.
- Inverse/conjugué d'éléments de $\mathbb{U}$.
- Pour $\theta \in \mathbb{R}$, introduction de la notation $e^{i\theta}$
- Premières propriétés
- produit, quotient, inverse d'éléments de la forme $e^{i\theta}, \theta \in \mathbb{R}$.
- Formule d'Euler, de l'angle moitié, de Moivre
- Application à la linéarisation (les applications de Moivre seront vues Lundi).

D) Forme trigonométrique et exponentielle complexe

- Définition argument
- Passage de la forme algébrique à la forme trigonométrique
- Lien entre représentation géométrique et forme trigonométrique
- Définition de l'exponentielle complexe, module et argument de $\exp(z)$.
- Exponentielle complexe d'une somme
- Résolution d'équations du type $\exp(z) = z^{'}, z, z^{'} \in \mathbb{C}$
- $\exp(z) = \exp(z^{'}) \Leftrightarrow z = z^{'} + 2ik\pi, k \in \mathbb{Z}$
- Surjectivité de l'exponentielle complexe de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}^*$.

E)Résolutions d'équations algébrique dans $\mathbb{C}$

- Racines d'un nombre complexes (2 racines pour un nombre non nul)
- Tout nombre complexe a deux racines opposées
- Méthode trigonométrique et algébrique pour trouver les racines d'un nombre complexe
- Résolution d'équations de degré 2 dans C.
- Définition racines n-ièmes de l'unité, théorème sur les racines n-ièmes de l'unité.
- Racine n-ième d'un nombre complexe général.
- Somme des racines complexes de l'unité.

F) Lien entre les nombres complexes et la géométrie (suite)

Lien entre les affixes de points, de vecteurs et l'alignement de points, l'orthogonalité de vecteurs, le parallélisme de droites.

Transformations du plan complexe : homotéthies,translations,rotations. Lien entre ces applications du plan et l'application associée dans les complexes.

Similitudes directes. Caractérisation des simplitudes directes (homotéthies,rotations,translations ou composées de rotation et homotéthies).

Chapitre 7 : Fonctions usuelles

A) Logarithme et exponentielle

- Défintion logarithme comme primitive de la fonction inverse.
- Propriétes logarithme, pour $a, b \in \mathbb{R}^+, n \in \mathbb{N}, \ln(ab), \ln(\frac{a}{b}), \ln(a^n)$.
- Etude de la fonction ln.
- Pour $x \in]-1, +\infty[$, $\ln(1+x) \leq x$.
- Bijectivité de la fonction logarithme.
- Définition exponentielle comme bijection réciproque de la fonction logarithme.
- $\exp(a+b), \exp(na), n \in \mathbb{N}, \exp(a-b)$.
- Etude de la fonction exp
- $\forall x \in \mathbb{R}, \exp(x) \geq 1+x$
- Tracé des deux fonctions

Questions de cours :

- Preuve des solutions d'une équation complexe de degré 2 + application à un polynome de degré 2 complexe.
- Preuve que les racines n-ième de l'unité sont exatement les $\exp(\frac{2ik\pi}{n}), k \in \{0, \cdots, n-1\}$.
- Trouver les racines de z de manière trigonométrique et algébrique pour $z \in \mathbb{C}$ au choix du colleur.
- Montrer qu'une similitude directe est soit :
  a) Une translation
  b) Une rotation
  c) Une homotéthie
  d) La composition d'une homotéthie et d'une rotation.

  Application à la caractérisation d'une similitude directe au choix du colleur.
- Soit $(x, y) \in \mathbb{R}_+^*$, montrer que $\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$ et en déduire :
  1) $\ln(\frac{x}{y}) = \ln(x) - \ln(y)$
  2) Si $n \in \mathbb{N}, \ln(x^n) = n\ln(x)$ (on explicitera le raisonnement)