L'usage de la calculatrice est interdit. Les raisonnements présentés devront être soigneusement justifiés et détaillés, quelques points seront dédiés à la présentation, l'orthographe et la propreté de votre copie. En particulier, ***il est IMPERATIF de souligner les résultats obtenus****. Il n'est pas nécessaire de répondre à l'ensemble des questions pour avoir une bonne note. Si vous ne parvenez pas à résoudre une question, vous pouvez admettre le résultat dans la suite de l'énoncé.Lisez bien tout le sujet avant de commencer et identifiez les parties plus simples pour vous, et commencez par ces parties.*

I Questions préliminaires

Dans ce devoir, j'indique par une ★ les questions plus longues ou plus difficiles que la moyenne mais qui seront également plus valorisées en terme de notation.

Exercice n° 1

1) Voir cours (faire attention à bien introduire les variables en jeu)

2)

$$\begin{aligned}\binom{6}{3} &= \frac{6!}{(6-3)!3!}\\ &= \frac{6.5.4.3.2.1}{(1.2.3).(1.2.3)}\\ &= \frac{6.5.4}{3.2.1}\\ &= 20.\end{aligned}$$

3) Voir cours (on voulait utiliser la preuve de Gauss par renversement de somme ici).

4)

$$\begin{aligned}\sum_{k=4}^{n+3}(2k+1) &\overset{\text{On pose } j=k-3}{=} \sum_{j=1}^{n}(2(j+3)+1)\\ &= \sum_{j=1}^{n} 2j+7\\ &\overset{\text{Linéarité}}{=} 2\sum_{j=1}^{n} j + 7\sum_{j=1}^{n} 1\\ &= 2\frac{n(n+1)}{2}+7n\\ &= n(n+8)\end{aligned}$$

5) On pose S la somme demandée. On a :

$$\begin{aligned}S &= \sum_{k=0}^{81} 81+4k\\ &\overset{\text{Linéarité}}{=} 81.81+4\frac{(81)(82)}{2}\\ &= 81(82.2+81)\\ &= 81.245\end{aligned}$$

6) Plusieurs méthodes ici.On peut soit simplifier les 2 produits "à la main" en utilisant des points de suspension ou séparer les 2 produits :

$$\begin{aligned}\prod_{k=1}^{n} \frac{k}{k+2} &= \frac{\prod_{k=1}^{n} k}{\prod_{k=1}^{n}(k+2)}\\ &\overset{\text{On pose } j=k+2}{=} \frac{\prod_{k=1}^{n} k}{\prod_{j=3}^{n+2} j}\\ &= \frac{1.2}{(n+1)(n+2)}\frac{\prod_{k=3}^{n} k}{\prod_{j=3}^{n} j}\\ &= \frac{2}{(n+1)(n+2)}\end{aligned}$$

7) Pour cette question, on va appliquer le binôme de Newton sur les deux quantités et remarquer que les termes de rang impairs se simplifient.

Pour $n \in \mathbb{N}$, notons $S = (2+\sqrt{3})^n + (2-\sqrt{3})^n$

$$\begin{aligned}S = (2+\sqrt{3})^n + (2-\sqrt{3})^n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{k}{n} 2^{n-k}\sqrt{3}^k + \sum_{k=0}^{n} \binom{k}{n} 2^{n-k}(-\sqrt{3})^k\\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{k}{n} 2^{n-k}(\sqrt{3}^k + (-\sqrt{3})^k)\\ &= \sum_{k=0, k \text{ pair}}^{n} \binom{k}{n} 2^{n-k}(\sqrt{3}^k + (-\sqrt{3})^k) + \sum_{k=0, k \text{ impair}}^{n} \binom{k}{n} 2^{n-k}(\sqrt{3}^k + (-\sqrt{3})^k)\end{aligned}$$

On remarque que lorsque k est pair, $\sqrt{3}^k + (-\sqrt{3})^k = 2\sqrt{3}^k$ est le double d'une puissance de 3, c'est donc un nombre entier.

¨Pour k impair $\sqrt{3}^k + (-\sqrt{3})^k = 0$ qui est entier.

S est donc une somme de produits de nombres entiers (Rappel : les coefficients binomiaux sont des nombres entiers), c'est donc un nombre entier.

8) Attention, on veut appliquer la formule du binôme mais on ne doit pas oublier qu'il y a un $2n$ ici et non un 2 :

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 6^{2n-k} &= 6^n \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 6^{n-k} 1^k\\ &\overset{\text{On applique le binôme de Newton}}{=} 6^n (6+1)^n\\ &= 42^n.\end{aligned}$$

9)

$$\begin{aligned}S &= \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n+1}{k+1}\\ &\overset{\text{changement } j=k+1}{=} \sum_{j=2}^{n} \binom{n+1}{j}\\ &= (\sum_{j=0}^{n+1} \binom{n+1}{j}) - (\binom{n+1}{n+1} - \binom{n+1}{1} - \binom{n+1}{0})\\ &= 2^{n+1} - (1 + (n+1) + 1)\\ &= 2^{n+1} - (n+3)\end{aligned}$$

10)

$$\begin{aligned} a^5+b^5 &= a^5-(-b)^5 \\ &\overset{\text{Par Jacobi}}{=} (a-b)\sum_{k=0}^{(}5-1)a^5b^{n-k} \\ &= (a-b)(b^4+ab^3+a^2b^2+a^3b+a^4). \end{aligned}$$

11)

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} k\cdot k! &= \sum_{k=1}^{n}(k+1-1)\cdot k! \\ &= \sum_{k=1}^{n}(k+1)!-k! \\ &\overset{\text{Par télescopage}}{=} (n+1)!-1. \end{aligned}$$

12)

$$\begin{aligned} \sum_{l=1}^{n}\sum_{k=l+1}^{n}\frac{l}{k} &\overset{\text{Inversion de sommes}}{=} \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\sum_{l=1}^{k-1} l \\ &= \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\frac{k(k-1)}{2} \\ &\overset{\text{Linéarité}}{=} \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}k-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}1 \\ &= \frac{n(n-1)}{4}-\frac{n}{2} \\ &= \frac{n(n-3)}{4} \end{aligned}$$

13)

$$\begin{aligned} \sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n}\frac{i}{j+1} &= \sum_{j=1}^{n}\frac{1}{j+1}\sum_{i=1}^{j} i \\ &= \sum_{j=1}^{n}\frac{j}{2} \\ &= \frac{n(n+1)}{4}. \end{aligned}$$

14) On sait que $\binom{j}{i}=0$ si $i>j$. Cela va nous permettre de supprimer certains termes de cette somme double.

$$\begin{aligned} \sum_{0\leq i,j\leq n}\binom{j}{i} &= \sum_{0\leq i\leq j\leq n}\binom{j}{i} \\ &= \sum_{j=0}^{n}\sum_{i=0}^{j}\binom{j}{i} \\ &\overset{\text{binôme de Newton}}{=} \sum_{j=0}^{n}2^j \\ &= \frac{1-2^{n+1}}{1-2} \\ &= 2^{n+1}-1. \end{aligned}$$

<u>**Exercice n°2**</u>

1) $\left(\sum_{k=1}^{n} f_k\right)' = \sum_{k=1}^{n} f_k'$.

2) En appliquant la formule du binôme de Newton, on obtient que :

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k = (1+x)^n$$

3) Tout d'abord, en tant que composée de la fonction $x \mapsto 1+x$ par la fonction $X \mapsto X^n$, on a que g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que $g'(x) = n(1+x)^{n-1}$.

De plus, d'après la question précédente g peut s'écrire $g = \sum_{k=0}^{n} f_k$ avec pour $k \in [\![0,n]\!]$, $f_k : x \mapsto \binom{n}{k} x^k$.

Ainsi d'après la question 1, g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$g'(x) = \sum_{k=0}^{n} f_k'(x) = \sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} x^{k-1}$$

4) a) D'après la question 2), on a que $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = g(1) = 2^n$.

(Remarque : C'est également un résultat du cours de somme et produit ou une simple application du binôme de Newton mais ici on peut simplement utiliser ce qu'on a déjà fait aux questions précédentes, ce qui est en général préférable)

b) D'après les résultats de la question 3), on remarque que $\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} = g'(1)$. En utilisant l'autre expression de la dérivée de g, on obtient que $\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} = n2^{n-1}$.

c) Pour cette question, on va avoir besoin de redériver g de 2 manières différentes. g est une fonction polynomiale donc elle est bien dérivable 2 fois sur $\mathbb{R}$ et on a pour $x \in \mathbb{R}$:

$$g''(x) = n(n-1)(1+x)^{n-2}$$

et par utilisation de la question 1) et 3) :

$$g''(x) = \sum_{k=0}^{n} f_k''(x) = \sum_{k=0}^{n} k(k-1)\binom{n}{k} x^{k-2}.$$

Grâce à ces calculs on obtient que

$$\sum_{k=0}^{n} k^2 \binom{n}{k} = g''(1) + g'(1) = n(n-1)2^{n-2} + n2^{n-1} = n(n+1)2^{n-2}.$$

Exercice n°3

1) On a $P_n(0) = 1$ (on ne fait que des produits de 1), $P_n(-n) = 0$, car alors

$$1 + \frac{-n}{n} = 0$$

et donc on a un terme nul dans le produit. Enfin,

$$P_n(1) = \prod_{k=1}^{n} \frac{k+1}{k} = \frac{2 \times 3 \times \cdots \times (n+1)}{1 \times 2 \times \cdots \times n} = n+1$$

2) On a

$$
\begin{aligned}
P_n(x) &= \prod_{k=1}^{n} \frac{x+k}{k} \\
&= \frac{(x+1)(x+2)\dots(x+n)}{1\times 2\times\cdots\times n} \\
&= \frac{x+n}{x} \times \frac{(x-1+1)(x-1+2)\dots(x-1+n)}{1\times 2\times\cdots\times n} \\
&= \frac{x+n}{x} P_n(x-1)
\end{aligned}
$$

3) On a

$$P_n(p) = \prod_{k=1}^{n} \frac{k+p}{k} = \frac{(p+1)\dots(p+n)}{n!} = \frac{(n+p)!}{n!p!} = \binom{n+p}{p}$$

Exercice n°4

1) Par croissance de la fonction racine cubique on a :

$$n \leq \sqrt[3]{k} < (n+1).$$

On remarque donc que pour un nombre k dans cet intervalle, la partie entière de k est n.

2)

$$
\begin{aligned}
u_{n+1} - u_n &\overset{\text{Relation de Chasles}}{=} \sum_{k=n^3}^{(n+1)^3-1} \lfloor \sqrt[3]{k} \rfloor \\
&\overset{\text{Question précédente}}{=} \sum_{k=n^3}^{(n+1)^3-1} n \\
&= n((n+1)^3 - n^3)
\end{aligned}
$$

3) On remarque qu'on peut poser,en gardant les notations $u_0 = 0$.
On a alors pour $n \in \mathbb{N}^*$:
$\mathrm{u}_n = \sum_{k=0}^{n-1} u_{k+1} - u_k$
$= \sum_{k=0}^{n-1} k((k+1)^3 - k^3)$
$= \sum_{k=0}^{n-1} k(k+1-k)[(k+1)^2 + k(k+1) + k^2]$

II Problèmes

Problème n° 1

Introduction à la série harmonique

1) On suppose que pour tout $n \in \mathbb{N}, v_n \leq v_{n+1}$. On veut montrer que (v_n) est croissante.
Soit $(p,q) \in \mathbb{N}^2, p < q$. On veut montrer que $v_p \leq v_q$. On va raisonner par récurrence.

2)

3)

4) On calcule $u_{n+1} - u_n = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \frac{1}{n+1} \geq 0$. On conclut donc La suite (u_n) est croissante.

5) On a

$$\begin{aligned} u_{2n} - u_n &= \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \\ &= \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \end{aligned}$$

On remarque de plus que

$$\forall k \in [\![n+1, 2n]\!], \quad \frac{1}{k} \geq \frac{1}{2n}$$

Il en résulte que

$$u_{2n} - u_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \geq \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{2n} = n\frac{1}{2n} = \frac{1}{2}$$

Il en résulte que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_{2n} - u_n \geq \frac{1}{2}$$

6) Supposons que (u_n) converge vers une limite finie ℓ, on a donc $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$ et $u_{2n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$ puis par opérations ur les limites, $u_{2n} - u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. On obtient donc une contradiction avec l'inégalité de la question précédente. On conclut

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$$

7) On a $w_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

8) En regroupant, tout au même dénominateur, on obtient

$$\frac{a}{n} + \frac{b}{n+1} + \frac{c}{2n+1} = \frac{(2a+2b+c)n^2 + (3a+b+c)n + a}{n(n+1)(2n+1)}$$

Pour que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{1}{n(n+1)(2n+1)} = \frac{a}{n} + \frac{b}{n+1} + \frac{c}{2n+1}$$

il suffit donc que $(2a+2b+c) = 0, (3a+b+c) = 0$ et $a = 1$, on résout et on trouve $a = b = 1$ et $c = -4$. On conclut que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{1}{n(n+1)(2n+1)} = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} - \frac{4}{2n+1}.$$

9) Première méthode, par récurrence, un peu lourd, mais cela marche. Seconde méthode :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k+1} &= \underbrace{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k+1} + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k}}_{\text{(tous les termes de la forme } \frac{1}{k} \text{ pour } k \text{ comprise entre 2 et } 2n+1.)} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k} \\
&= \sum_{k=2}^{2n+1} \frac{1}{k} - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \\
&= \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} + \frac{1}{2n+1} - 1 \\
&= u_{2n} - \frac{1}{2} u_n - 1 + \frac{1}{2n+1}
\end{aligned}$$

On conclut

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k+1} = u_{2n} - \frac{1}{2} u_n - 1 + \frac{1}{2n+1}$$

10) En utilisant la question 6 , on a

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{6}{k(k+1)(2k+1)}$$

Utilisant les question 6 et 7 , on en déduit

$$\begin{aligned}
S_n &= 6 \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} + \frac{1}{k+1} - \frac{4}{2k+1} \\
&= 6 \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} + 6 \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1} - 24 \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k+1} \\
&= 6u_n + 6 \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - 1 + \frac{1}{n+1} \right) - 24 \left(u_{2n} - \frac{1}{2} u_n - 1 + \frac{1}{2n+1} \right) \\
&= -24u_{2n} + 24u_n + 18 + \frac{6}{n+1} + \frac{1}{2n+1}
\end{aligned}$$

On conclut

$$S_n = -24u_{2n} + 24u_n + 18 + \frac{6}{n+1} + \frac{1}{2n+1}$$

Problème n° 2

Autour des coefficients binomiaux

Partie 0 : Rappel du cours

1) Voir cours.

2) Voir cours.

Partie I : Calcul d'une somme

3) On utilise un raisonnement par récurrence. ⋆ On a :

$$\sum_{k=0}^{0} k^3 = 0^3 = 0 \quad \text{et} \quad \frac{0^2(0+1)^2}{4} = 0$$

donc l'égalité est vraie pour $n=0$. ⋆ Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $\sum_{k=0}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$. Montrons que $\sum_{k=0}^{n+1} k^3 = \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}$. On a :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n+1} k^3 &= \sum_{k=0}^{n} k^3 + (n+1)^3 \quad \text{(relation de Chasles)}\\
&= \frac{n^2(n+1)^2}{4} + (n+1)^3 \quad \text{(hypothèse de récurrence)}\\
&= \frac{n^2(n+1)^2 + 4(n+1)\times(n+1)^2}{4}\\
&= \frac{(n+1)^2\left(n^2+4n+4\right)}{4}\\
&= \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}
\end{aligned}$$

L'égalité est donc vraie au rang $n+1$.

4) a) Soient $k \in \mathbb{N}$ et $\ell \in [\![0, k-1]\!]$. On a (puisque $0 \leqslant \ell+1 \leqslant k \leqslant k+1$) :

$$\begin{aligned}
\binom{k+1}{\ell+1} - \binom{k}{\ell+1} &= \frac{(k+1)!}{(\ell+1)!(k-\ell)!} - \frac{k!}{(\ell+1)!(k-\ell-1)!} \times \frac{\boldsymbol{k-\ell}}{\boldsymbol{k-\ell}}\\
&= \frac{(k+1)k! - (k-\ell)k!}{(\ell+1)!(k-\ell)!}\\
&= \frac{(\ell+1)k!}{(\ell+1)!(k-\ell)!}\\
&= \frac{k!}{\ell!(k-\ell)!}\\
&= \binom{k}{\ell}
\end{aligned}$$

Par ailleurs, l'égalité est évidente si $\ell = k$; en effet, $\binom{k}{k+1} = 0$ donc les deux nombres mis en jeu dans l'égalité sont égaux à 1 . Finalement :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \forall \ell \in [\![0, k]\!], \quad \binom{k}{\ell} = \binom{k+1}{\ell+1} - \binom{k}{\ell+1}$$

b) Soient $\ell, n \in \mathbb{N}$ tels que $\ell \leqslant n$. D'après la question précédente, on a :

$$\sum_{k=\ell}^{n} \binom{k}{\ell} = \sum_{k=\ell}^{n} \left[\binom{k+1}{\ell+1} - \binom{k}{\ell+1}\right] = \binom{n+1}{\ell+1} - \binom{\ell}{\ell+1}$$

car la somme est télescopique. Or $\binom{\ell}{\ell+1} = 0$ car $\ell+1 > \ell$ donc :

$$\sum_{k=\ell}^{n} \binom{k}{\ell} = \binom{n+1}{\ell+1}$$

Soient $\ell, n \in \mathbb{N}$ tels que $\ell \leqslant n$. D'après la question précédente, on a :

$$\sum_{k=\ell}^{n} \binom{k}{\ell} = \sum_{k=\ell}^{n} \left[\binom{k+1}{\ell+1} - \binom{k}{\ell+1} \right] = \binom{n+1}{\ell+1} - \binom{\ell}{\ell+1}$$

car la somme est télescopique. Or $\binom{\ell}{\ell+1} = 0$ car $\ell + 1 > \ell$ donc :

$$\sum_{k=\ell}^{n} \binom{k}{\ell} = \binom{n+1}{\ell+1}$$

c) Pour tout entier k supérieur ou égal à 3 , on a :

$$\binom{k}{3} = \frac{k!}{3!(k-3)!} = \frac{k(k-1)(k-2)}{6}$$

et cette égalité reste vraie si $k \in \{0,1,2\}$ car, dans ce cas, on a $\binom{k}{3} = 0$ (le membre de droite ci-dessus étant également nul). Ainsi :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \binom{k}{1} = k, \quad \binom{k}{2} = \frac{k(k-1)}{2} \quad \text{et} \quad \binom{k}{3} = \frac{k(k-1)(k-2)}{6}$$

d) Soient $a, b, c, k \in \mathbb{N}$. On a :

$$\begin{aligned} a\binom{k}{3} + b\binom{k}{2} + c\binom{k}{1} &= a\frac{k(k-1)(k-2)}{6} + b\frac{k(k-1)}{2} + ck \\ &= \frac{a\left(k^3 - 3k^2 + 2k\right)}{6} + \frac{b\left(k^2 - k\right)}{2} + ck \\ &= \frac{a}{6}k^3 + \left(\frac{b}{2} - \frac{a}{2}\right)k^2 + \left(\frac{a}{3} - \frac{b}{2} + c\right)k \end{aligned}$$

Ainsi, pour que l'égalité $a\binom{k}{3} + b\binom{k}{2} + c\binom{k}{1} = k^3$ soit vraie, il suffit que a, b et c soient tels que :

$$\left\{ \begin{array}{c} \frac{a}{6} = 1 \\ \frac{b}{2} - \frac{a}{2} = 0 \\ \frac{a}{3} - \frac{b}{2} + c = 0 \end{array} \right. \quad \text{i.e.} \quad \left\{ \begin{array}{c} a = 6 \\ b = a = 6 \\ c = \frac{b}{2} - \frac{a}{3} = 1 \end{array} \right.$$

Finalement :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad k^3 = 6\binom{k}{3} + 6\binom{k}{2} + \binom{k}{1}$$

e) Soit $n \in \mathbb{N}$. En sommant les égalités obtenues à la question précédente, il vient :

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n} k^3 = \sum_{k=0}^{n} \left(6\binom{k}{3} + 6\binom{k}{2} + \binom{k}{1} \right) &= 6\sum_{k=0}^{n} \binom{k}{3} + 6\sum_{k=0}^{n} \binom{k}{2} + \sum_{k=0}^{n} \binom{k}{1} \\ &= 6\sum_{k=3}^{n} \binom{k}{3} + 6\sum_{k=2}^{n} \binom{k}{2} + \sum_{k=1}^{n} \binom{k}{1} \\ &= 6\binom{n+1}{4} + 6\binom{n+1}{3} + \binom{n+1}{2} \end{aligned}$$

d'après la formule du triangle de Pascal généralisée (question 2.(b)). En explicitant les coefficients binomiaux, on obtient :

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} k^3 &= 6\times\frac{(n+1)n(n-1)(n-2)}{24}+6\times\frac{(n+1)n(n-1)}{6}+\frac{n(n+1)}{2}\\ &= n(n+1)\frac{(n-1)(n-2)+4(n-1)+2}{4}\\ &= n(n+1)\frac{n^2+n}{4}\\ &= \frac{n^2(n+1)^2}{4}\end{aligned}$$

Ainsi : on retrouve bien l'égalité (*)

Partie II : Formule d'inversion de Pascal

1) Soient $n,k,\ell\in\mathbb{N}$ tels que $\ell\leqslant k\leqslant n$. On a :

$$\begin{aligned}\binom{n}{k}\binom{k}{\ell} = \frac{n!}{k!(n-k)!}\times\frac{k!}{\ell!(k-\ell)!} &= \frac{n!}{(n-k)!\ell!(k-\ell)!}\\ &= \frac{n!}{\ell!(n-\ell)!}\times\frac{(n-\ell)!}{(k-\ell)!((n-\ell)-(k-\ell))!}\\ &= \binom{n}{\ell}\binom{n-\ell}{k-\ell}\end{aligned}$$

Ainsi : □

$$\forall n,k,\ell\in\mathbb{N},\quad \ell\leqslant k\leqslant n \Longrightarrow \binom{n}{k}\binom{k}{\ell}=\binom{n}{\ell}\binom{n-\ell}{k-\ell}$$

2) Soient $n,\ell\in\mathbb{N}$ tels que $\ell\leqslant n$. D'après la question précédente, on a :

$$\begin{aligned}S_{n,\ell}=\sum_{k=\ell}^{n}(-1)^{k-\ell}\binom{n}{\ell}\binom{n-\ell}{k-\ell} &= \binom{n}{\ell}\sum_{k=\ell}^{n}\binom{n-\ell}{k-\ell}(-1)^{k-\ell}\\ &= \binom{n}{\ell}\sum_{j=0}^{n-\ell}\binom{n-\ell}{j}(-1)^{j}\quad(\text{ changement d'indice } j=k-\ell)\\ &= \binom{n}{\ell}\sum_{j=0}^{n-\ell}\binom{n-\ell}{j}(-1)^{j}1^{n-\ell-j}\\ &= \binom{n}{\ell}0^{n-\ell}\end{aligned}$$

Ainsi :

$$S_{n,\ell}=\begin{cases}0 & \text{si } \ell<n\\ 1 & \text{si } \ell=n\end{cases}$$

3) Soit $n\in\mathbb{N}$. D'après les propriétés sur les sommes triangulaires, on a :

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n+k}\binom{n}{k}b_k = \sum_{k=0}^{n}(-1)^{n+k}\binom{n}{k}\sum_{\ell=0}^{k}\binom{k}{\ell}a_\ell &= \sum_{k=0}^{n}\sum_{\ell=0}^{k}(-1)^{n+k}\binom{n}{k}\binom{k}{\ell}a_\ell \\ &= \sum_{0\leqslant \ell\leqslant k\leqslant n}(-1)^{n+k}\binom{n}{k}\binom{k}{\ell}a_\ell \\ &= \sum_{\ell=0}^{n}(-1)^{n+\ell}a_\ell\sum_{k=\ell}^{n}(-1)^{k-\ell}\binom{n}{k}\binom{k}{\ell} \\ &= \sum_{\ell=0}^{n}(-1)^{n+\ell}a_\ell S_{n,\ell}\end{aligned}$$

En utilisant maintenant la question précédente, il vient :

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n+k}\binom{n}{k}b_k = \underbrace{\sum_{\ell=0}^{n-1}(-1)^{n+\ell}a_\ell\underbrace{S_{n,\ell}}_{=0}}_{=0} + \underbrace{(-1)^{2n}}_{=1}a_n S_{n,n} = a_n$$

Ainsi :

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad a_n = \sum_{k=0}^{n}(-1)^{n+k}\binom{n}{k}b_k$$

4) **Application.**

a) On utilise une récurrence simple. ⋆ On sait que $x_0 = 1$ donc :

$$\sum_{k=0}^{0}\binom{0}{k}x_k = \binom{0}{0}x_0 = 1 = 0!$$

L'égalité est donc vraie pour $n = 0$. ⋆ Soit $n\in\mathbb{N}$. On suppose que $n! = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x_k$. Montrons que $(n+1)! = \sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}x_k$. On a :

$$\begin{aligned}(n+1)! &= (n+1)\times n! \\ &= (n+1)\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x_k \quad \text{(hypothèse de récurrence)} \\ &= \sum_{k=0}^{n}(n+1)\binom{n}{k}x_k \\ &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n+1}{k+1}(k+1)x_k \quad \text{(formule du pion)} \\ &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n+1}{k+1}\left(x_{k+1}-(-1)^{k+1}\right) \quad \text{(relation de récurrence vérifiée par la suite)} \\ &= \sum_{\ell=1}^{n+1}\binom{n+1}{\ell}\left(x_\ell-(-1)^{\ell}\right) \quad \left(\text{changement d'indice } \ell = k+1\right) \\ &= \sum_{\ell=1}^{n+1}\binom{n+1}{\ell}x_\ell - \sum_{\ell=1}^{n+1}\binom{n+1}{\ell}(-1)^{\ell}\end{aligned}$$

D'après la formule du binôme de Newton, on a :

$$\sum_{\ell=1}^{n+1}\binom{n+1}{\ell}(-1)^\ell=\sum_{\ell=0}^{n+1}\binom{n+1}{\ell}(-1)^\ell-1=0^{n+1}-1=-1\quad(\text{car } n+1>0)$$

donc :

$$(n+1)!=\sum_{\ell=1}^{n+1}\binom{n+1}{\ell}x_\ell+1=\sum_{\ell=0}^{n+1}\binom{n+1}{\ell}x_\ell$$

car $\binom{n+1}{0}x_0=1$. L'égalité est donc vraie au rang $n+1$.

b) Soit $n\in\mathbb{N}$. D'après ce qui précède (pour tout $k\in\mathbb{N}$, on a ici $a_k=x_k$ et $b_k=k!$) : $x_n=\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n+k}\binom{n}{k}k!=\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n+k}\frac{n!}{(n-k)!}=n!\sum_{\ell=0}^{n}\frac{(-1)^{2n-\ell}}{\ell!}$ (changement d'indice $\ell=n-k$) Or $(-1)^{2n}=1$ et, pour tout $\ell\in[\![0,n]\!]$, on a $(-1)^{-\ell}=(-1)^\ell$ donc :

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad x_n=n!\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k!}$$