L'usage de la calculatrice est interdit. Les raisonnements présentés devront être soigneusement justifiés et détaillés, quelques points seront dédiés à la présentation, l'orthographe et la propreté de votre copie. En particulier, ***il est IMPERATIF de souligner les résultats obtenus****. Il n'est pas nécessaire de répondre à l'ensemble des questions pour avoir une bonne note. Si vous ne parvenez pas à résoudre une question, vous pouvez admettre le résultat dans la suite de l'énoncé.Lisez bien tout le sujet avant de commencer et identifiez les parties plus simples pour vous, et commencez par ces parties.*

I Questions préliminaires

Dans ce devoir, j'indique par une ★ les questions plus longues ou plus difficiles que la moyenne mais qui seront également plus valorisées en terme de notation.

Rappel n°1 :

On dit qu'une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est 2 fois dérivable sur I et on note sa dérivée seconde f'' si f est dérivable sur I et sa dérivée f' est également dérivable sur I, auquel cas, on a $f'' = (f')'$.
Remarque : Les variations de f' peuvent se déduire de celles de f'' tout comme celle de f peuvent se déduire de celles de f'.

Rappel n°2 : Théorème des gendarmes

Soit (u_n), (v_n),(w_n) trois suites réelles et $l \in \mathbb{R}$.
Si (u_n) et (w_n) convergent vers l et que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq v_n \leq w_n$. Alors v_n converge vers l.

Exercice n° 1

1) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, rappeler, avec des quantificateurs, la définition de :
   a) f périodique.
   b) f impaire
   c) f bornée (on donnera 2 définitions équivalentes)
   d) f monotone.

2) Montrer que toute fonction $f : [0;1] \to \mathbb{R}$ est la somme d'une fonction affine et d'une fonction qui s'annule en 0 et en 1 .

3) On considère la suite (u_n) définie par : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = u_0 + u_1 + \ldots + u_n \end{cases}$ Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \leq 2^n$.

4) Énoncer à l'aide de quantificateurs les propriétés suivantes :
   a) Tout nombre entier est un nombre réel.
   b) La fonction f est de signe constant sur l'intervalle $]0, +\infty[$.
   c) La fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
   d) La réciproque et la contraposée (en précisant bien laquelle est laquelle...) de la proposition : $\left(\exists p \in \mathbb{N}, p^2 = n\right) \Rightarrow$ (n n'est pas un entier premier)

   Donner un contre-exemple montrant que la réciproque énoncée à la question d) est fausse.

5) Traduire les assertions suivantes en langage courant, dire si elles sont vraies ou fausses (à justifier). Dans le cas d'une assertion fausse, on écrira sa négation avant de la démontrer :
   a) $\exists M \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, x^2 \leqslant M$.
   b) $\forall m \in]0;1], \exists x \in]0;1], x < m$.

6) Prouver que pour $(a,b) \in \mathbb{R}^2$

$$\lfloor a \rfloor + \lfloor b \rfloor \leq \lfloor a+b \rfloor \leq \lfloor a \rfloor + \lfloor b \rfloor + 1.$$

7) Écrire la négation de la proposition :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in \mathbb{R}, \quad \left(|x| < \alpha \Rightarrow \left|\frac{\sqrt{x}}{x^2+1}\right| < \varepsilon\right)$$

Exercice n°2

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et inéquations suivantes. On commencera systématiquement par déterminer le domaine de définition des fonctions impliquées :

1) $|1-x|+|x|=1$

2) $\sqrt{x-1}=2-x$

3) $\frac{1}{x+1} \leqslant \sqrt{1-x}$

4) $|7-5x| \leq |2x+3|$

Exercice n°3

Si P et Q sont deux propositions mathématiques, on définit un nouveau connecteur logique " non et ", symbolisé par la notation $P \uparrow Q$, par $P \uparrow Q = \neg(P \wedge Q)$. Autrement dit, la proposition $P \uparrow Q$ est vraie si et seulement si $P \wedge Q$ est fausse (comme son nom l'indique).

1) Rappeller les lois de de Morgan. En déduire une réécriture de $P \uparrow Q$ avec les connecteurs logiques usuels.

2) Écrire la table de vérité de $P \uparrow Q$.

3) Si P, Q et R sont trois propositions, est-ce que $(P \uparrow Q) \uparrow R$ est équivalente à $P \uparrow (Q \uparrow R)$?

4) Montrer qu'on peut exprimer $\neg P$ uniquement à l'aide de P et du symbole $\uparrow$.

5) Exprimer $P \vee Q$ et $P \wedge Q$ uniquement en fonction de P, Q, et $\uparrow$.

6) Exprimer l'implication $P \Rightarrow Q$ et l'équivalence $P \Leftrightarrow Q$ uniquement à l'aide de P, Q et $\uparrow$.

II Problèmes

Problème n° 1

Partie 1 : Signification de la convergence d'une suite

Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on dit que la suite (v_n) converge vers $l \in \mathbb{R}$ si :

$$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq N \Rightarrow |u_n - l| \leq \epsilon.$$

1) Dans cette question, on cherche à montrer un résultat classique de convergence : la suite de terme général $v_n = \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}$ converge vers 0.

a) Soit $\varepsilon > 0$, montrer que :

$$0 \leq \frac{1}{\lfloor \frac{1}{\varepsilon} \rfloor + 1} \leq \varepsilon$$

b) En déduire que pour tout $\varepsilon > 0$, $\exists N \in \mathbb{N}, v_N \leq \varepsilon$.

c) Montrer que la suite (v_n) est décroissante.

d) Conclure quand à la convergence de v_n.

2) Soit (w_n) une suite réelle et $l \in \mathbb{R}$, montrer l'équivalence suivante :

$$w_n \text{ converge vers } l \Leftrightarrow (w_n - l) \text{ converge vers } 0 \Leftrightarrow |(w_n - l)| \text{ converge vers } 0.$$

3) On cherche à montrer par l'absurde qu'une suite (v_n) ne peut converger vers 2 limites différentes.

a) Rappeller l'inégalité triangulaire.

b) Soit (l_1, l_2) 2 réels **différents**. Soit $\varepsilon > 0$.
On suppose qu'il existe $(N_1, N_2) \in \mathbb{N}^2$ tels que pour tout $n \in \mathbb{N}$

- Si $n \geq N_1, |v_n - l_1| \leq \varepsilon$
- Si $n \geq N_2, |v_n - l_2| \leq \varepsilon$.

Pour quelle valeur de $N \in \mathbb{N}$ a-t-on nécessairement :

$$n \geq N \Rightarrow |v_n - l_1| \leq \varepsilon \text{ et } |v_n - l_2| \leq \varepsilon.$$

c) En considérant $\varepsilon = \frac{|l_1 - l_2|}{3}$, montrer qu'il n'est pas possible que v_n admette pour limite l_1 et l_2.

Partie 2 : Etude de fonctions et de suites

On définit dans cet partie une fonction f par $f(x) = \frac{1}{1+x+x^2}$.

1) Déterminer le domaine de définition de la fonction f.

2) Calculer la dérivée f' de la fonction f, puis sa dérivée seconde f''. On donnera l'expression la plus factorisée possible de $f''(x)$. On prouvera la dérivabilité des fonctions en jeu avant de les dériver.

3) Dresser le tableau de variations de f' sur son ensemble de définition, puis celui de f (on précisera les limites utiles).

4) Quelles asymptotes possède f ?

5) Tracer une allure de la courbe représentative de la fonction f.

6) Montrer que l'intervalle $I = \left[\frac{1}{3}, 1\right]$ est stable par la fonction f, c'est-à-dire que pour tout $x \in I, f(x) \in I$..

7) Montrer qu'il existe une constante $C \in]0,1[$ telle que, $\forall x \in I, |f'(x)| \leqslant C$. On admet que cette inégalité implique la suivante : $\forall (x,y) \in I^2, |f(y) - f(x)| \leqslant C|y-x|$.

8) Montrer que l'équation $x^3 + x^2 + x - 1 = 0$ admet une seule solution réelle (sans chercher à la résoudre), et en déduire que l'équation $f(x) = x$ admet également une seule solution qu'on notera l. Vérifier enfin que $l \in I$.

9) On définit désormais une suite (u_n) de la façon suivante : $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$.

- a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in I$ (réutiliser les questions précédentes est vivement conseillllé).
- b) Montrer que l'inégalité $|u_{n+1} - l| \leqslant C \times |u_n - l|$ est vérifiée pour tout entier naturel n.
- c) En déduire que $|u_n - l| \leqslant C^n$.
- d) Conclure quant a la convergence de la suite (u_n).

Problème n° 2

On pose $g(x) = \frac{2x}{x+2}$ et on veut montrer que g minore f sur $[0,+\infty[$. Pour cela, on va étudier la fonction h définie par $h(x) = f(x) - g(x)$.

Partie 1 : Minoration par une fonction rationnelle

1) Calculer la dérivée h' de la fonction h.

2) Faire le tableau de variations complet (limites incluses) de la fonction h sur l'intervalle $[0,+\infty[$.

3) En déduire que la fonction f est minorée par g sur $[0,+\infty[$.

4) Montrer que les courbes représentatives des fonctions f et g admettent une tangente commune pour $x = 0$.

Partie 2 : Une famille de fonctions majorantes

Pour tout réel k, on définit une fonction f_k par $f_k(x) = \ln(1+x) - kx$.

5) Étudier les variations et les limites de $f_1 : x \mapsto \ln(1+x) - x$ sur l'intervalle $[0,+\infty[$.

6) Montrer que la fonction identité $x \mapsto x$ est minorée par f sur $[0,+\infty[$, et en déduire plus généralement que $\forall k \geqslant 1$, la fonction $x \mapsto kx$ est minorée par f.

7) On suppose désormais $k \in]0,1[$, montrer que la dérivée de f_k s'annule alors pour $x = \frac{1-k}{k}$.

8) En déduire les variations de f_k (toujours quand $k \in]0,1[$). On ne demande pas les limites de la fonction f_k.

9) Montrer que f_k admet un maximum sur $[0,+\infty[$. Quel est son signe ?

10) En déduire les valeurs de k pour lesquelles $x \mapsto kx$ est minorée par f.