L'usage de la calculatrice est interdit. Les raisonnements présentés devront être soigneusement justifiés et détaillés, quelques points seront dédiés à la présentation, l'orthographe et la propreté de votre copie. En particulier, ***il est IMPERATIF de souligner les résultats obtenus****. Il n'est pas nécessaire de répondre à l'ensemble des questions pour avoir une bonne note. Si vous ne parvenez pas à résoudre une question, vous pouvez admettre le résultat dans la suite de l'énoncé.Lisez bien tout le sujet avant de commencer et identifiez les parties plus simples pour vous, et commencez par ces parties.*

I Questions préliminaires

Dans ce devoir, j'indique par une ★ les questions plus longues ou plus difficiles que la moyenne mais qui seront également plus valorisées en terme de notation.

Exercice n° 1

1) Énoncer la formule du binôme de Newton.

2) Calculer $\binom{6}{3}$

3) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, donner la valeur de $\sum_{k=1}^{n} k$ et prouver ce résultat sans effectuer de récurrence.

4) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, simplifier $\sum_{k=4}^{n+3}(2k+1)$.

5) Calculer $81 + 85 + 89 + 93 + \cdots + 405$.

6) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, simplifier $\prod_{k=1}^{n} \frac{k}{k+2}$.

7) Soit $n \in \mathbb{N}$, démontrer que $(2+\sqrt{3})^n + (2-\sqrt{3})^n$ est un entier naturel
(on rappelle que la somme d'entiers naturels est un entier naturel)

8) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, simplifier $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 6^{2n-k}$.

9) Soit $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq 2$. Calculer $S = \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n+1}{k+1}$.

10) Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, En remarquant que $(-b)^5 = -b^5$ factoriser $a^5 + b^5$.

11) En remarquant que $(k+1)! = (k+1)k!$, calculer $\sum_{k=1}^{n} k \cdot k!$.

12) Calculer $\prod_{k=1}^{n} 7^{\frac{1}{k} - \frac{1}{n-k+1}}$.

13) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, calculer $\sum_{l=1}^{n} \sum_{k=l+1}^{n} \frac{l}{k}$.

14) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, calculer $\sum_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n} \frac{i}{j+1}$.

15) ★ Soit $n \in \mathbb{N}^*$ calculer $\sum_{0 \leq i,j \leq n} \binom{j}{i}$.

Exercice n°2

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $f_0, \cdots, f_n \in D(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ (l'ensemble des fonctions dérivables de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$). On admet que $f_1 + \cdots + f_n = \sum_{k=1}^{n} f_k$ est dérivable de dérivée $f_1^{'} + \cdots + f_n^{'} = \sum_{k=1}^{n} f_k^{'}$ (Attention,ici cette somme n'est pas une somme de réels mais bien une somme de fonctions !)

1) Soit $x \in \mathbb{R}$, que vaut $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k$?

2) On pose $g : x \mapsto (1+x)^n$. En utilisant la question précédente, donner 2 expressions de la dérivée de g.

3) En prenant certaines valeurs de x déduire les valeurs des expressions suivantes :

a) $\sum_{k=0}^{n} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}$ où $n \geq 0$.

b) $\sum_{k=0}^{n} k \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}$ où $n \geq 1$.

c) ★ $\sum_{k=0}^{n} k^2 \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}$ où $n \geq 2$.

Exercice n°3

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$, on note

$$P_n(x) = \prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{x}{k}\right)$$

1) Que valent $P_n(0), P_n(1), P_n(-n)$?

2) Démontrer que pour tout réel non-nul x, on a

$$P_n(x) = \frac{x+n}{x} P_n(x-1)$$

3) Pour $p \in \mathbb{N}^*$, écrire $P_n(p)$ comme coefficient binomial.

Exercice n°4(BONUS : À ne traiter que s'il vous reste du temps).

★ Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose $u_n = \sum_{k=0}^{n^3-1} \lfloor \sqrt[3]{k} \rfloor$ où $\lfloor x \rfloor$ désigne la partie entiére du réel x (pour rappel, pour $n \in \mathbb{N}^*, x \in \mathbb{R}$, $\lfloor x \rfloor = n$ si et seulement si $n \leq x < n+1$.)

1) Encadrer entre 2 entiers $\sqrt[3]{k}$ pour $k \in [\![n^3, (n+1)^3 - 1]\!]$

2) Calculer $u_{n+1} - u_n$

3) En déduire u_n en fonction de n.

II Problèmes

Problème n° 1

Introduction à la série harmonique

On définit la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ par $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$. Dans

1) Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite. On dit qu'une suite est croissante si pour tout $(k,p) \in \mathbb{N}^2$, $k \leq p$ implique que $v_k \leq v_p$.
Prouver par récurrence que si pour tout $n \in \mathbb{N}, v_n \leq v_{n+1}$, alors la suite v est croissante.
On commencera par introduire 2 variables k et p avec $k \leq p$.
On admettra le résultat dans la suite.

2) Soit $(c_k)_{k\in[\![1,n}$ et $(d_k)_{k\in[\![1,n}$ deux familles de réels. Prouver par récurrence que si pour tout $k \in [\![1,n]\!], c_k \leq d_k$, alors $\sum_{k=1}^{n} c_k \leq \sum_{k=1}^{n} d_k$.
On admettra le résultat dans la suite.

3) Prouver que u_n est croissante.

4) Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in [\![n, 2n]\!]$, comparer $\frac{1}{k}$ et $\frac{1}{n}$.
En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_{2n} - u_n \geq \frac{1}{2}$.

5) Montrer que Montrer que (u_n) ne converge pas vers une limite finie.
On définit les suites $(w_n)_{n\geq 1}$ et $(S_n)_{n\geq 1}$ par

$$w_n = \sum_{k=1}^{n} k^2 \text{ et } S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{w_n}$$

1) Enoncerla valeur de w_n.

2) Déterminer $a, b, c \in \mathbb{R}$, tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{1}{n(n+1)(2n+1)} = \frac{a}{n} + \frac{b}{n+1} + \frac{c}{2n+1}$$

3) Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k+1} = u_{2n} - \frac{1}{2}u_n - 1 + \frac{1}{2n+1}.$$

4) Exprimer S_n en fonction de u_n, u_{2n} et n.

Problème n° 2

Autour des coefficients binomiaux

Partie 0 : Rappel du cours

1) Soit $(a_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}$. Ecrire sous forme de somme double et de 2 manières différentes la somme :

$$\sum_{1\leq i\leq j\leq n} a_{i,j}$$

2) Faire de même pour :

$$\sum_{1\leq i<j\leq n} a_{i,j}$$

Partie I : Calcul d'une somme

Le but de cette première partie est de démontrer, de deux manières différentes, que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \sum_{k=0}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} (\star)$$

3) Méthode n°1 :
Démontrer $(\star)$ en procédant par récurrence sur l'entier n.

4) Méthode n°2 : En utilisant la formule du triangle de Pascal généralisée

a) Soit $k \in \mathbb{N}$. Démontrer que :

$$\forall \ell \in [\![0,k]\!], \quad \binom{k}{\ell} = \binom{k+1}{\ell+1} - \binom{k}{\ell+1}$$

b) Soient $\ell, n \in \mathbb{N}$ tels que $\ell \leqslant n$. Montrer que :

$$\sum_{k=\ell}^{n} \binom{k}{\ell} = \binom{n+1}{\ell+1}$$

Cette égalité s'appelle formule du triangle de Pascal généralisée.

c) Soit $k \in \mathbb{N}$. Expliciter les coefficients binomiaux $\binom{k}{1}$, $\binom{k}{2}$ et $\binom{k}{3}$.

d) En déduire qu'il existe $a, b, c \in \mathbb{N}$ tels que :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad k^3 = a\binom{k}{3} + b\binom{k}{2} + c\binom{k}{1}$$

e) Retrouver alors $(\star)$.
Si les coefficients a, b et c n'ont pas été obtenus à la question précédente, un calcul pourra tout de même être effectué.

Partie II : Formule d'inversion de Pascal

Soit $(a_\ell)_{\ell\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels. À partir de celle-ci, on définit une suite $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ par :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad b_k = \sum_{\ell=0}^{k} \binom{k}{\ell} a_\ell$$

L'objectif de cette partie est de trouver, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'expression de a_n en fonction de $b_0, \ldots, b_n$.

5) Soient $n, k, \ell \in \mathbb{N}$ tels que $\ell \leqslant k \leqslant n$. Montrer que :

$$\binom{n}{k}\binom{k}{\ell} = \binom{n}{\ell}\binom{n-\ell}{k-\ell}$$

6) Soient $n, \ell \in \mathbb{N}$ tels que $\ell \leqslant n$. On pose $S_{n,\ell} = \sum_{k=\ell}^{n} (-1)^{k-\ell}\binom{n}{k}\binom{k}{\ell}$. En utilisant la question précédente puis un changement d'indice, montrer que :

$$S_{n,\ell} = \begin{cases} 0 & \text{si } \ell < n \\ 1 & \text{si } \ell = n \end{cases}$$

7) Conclure que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n+k}\binom{n}{k} b_k$$

Indication : On pourra utiliser des propriétés des sommes triangulaires.

8) Application.

On considère la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $x_0 = 1$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad x_{n+1} = (n+1)x_n + (-1)^{n+1}$$

a) À l'aide d'un raisonnement par récurrence, montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad n! = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x_k$$

b) En déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad x_n = n! \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$$