TD 6 : Fonctions usuelles

Exponentielle, logarithme, fonctions puissances

1

1) Simplifier a^b pour $a = \exp\left(x^2\right)$ et $b = \frac{1}{x}\ln\left(x^{1/x}\right)$.
2) Comparer $\lim_{x\to 0^+} x^{(x^x)}$ et $\lim_{x\to 0^+} (x^x)^x$.
3) Calculer $\lim_{x\to+\infty} x^{1/x}$, $\lim_{x\to 0} x^{\sqrt{x}}$ et $\lim_{x\to 0^+} x^{1/x}$.

2 (Vrac) Montrer les égalités et inégalités suivantes :

1) $\forall x > 0, \ln(x) \leqslant x-1$;
2) $\forall x \in [-1;1], \operatorname{Arccos}(x) + \operatorname{Arcsin}(x) = \frac{\pi}{2}$
3) $\forall x \in \mathbb{R}^*, \operatorname{Arctan}(x) + \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{si } x > 0 \\ -\frac{\pi}{2} & \text{si } x < 0 \end{cases}$.

3 Résoudre les systèmes suivants

1) $\begin{cases} 8^x = 10y \\ 2^x = 5y \end{cases}$
2) $\begin{cases} e^x e^{2y} = a \\ 2xy = 1 \end{cases}$

4 Résoudre les équations suivantes d'inconnue $x \in \mathbb{R}$:

1) $e^x + e^{1-x} = e+1$
2) $x^{\sqrt{x}} = (\sqrt{x})^x$
3) $2^{2x} - 3^{x-1/2} = 3^{x+1/2} - 2^{2x-1}$
4) $\log(x-2) + \log(x+3) = 2$
5) $\ln\left(x^2-1\right) + \ln(4) = \ln(4x-1)$
6) $\ln|x-1| + \ln|x+2| = \ln\left|4x^2+3x-7\right|$
7) $2^{x^2} = 3^{x^3}$
8) $2^{x+1} + 4^x = 15$
9) $\sqrt{x} + \sqrt[3]{x} = 2$
10) $\frac{\ln(x)}{\ln(a)} = \frac{\ln(a)}{\ln(x)}$ où $a > 1$
11) $3^x + 4^x = 5^x$
12) $x^{x^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2}$

5

1) Étudier la fonction $f : x \mapsto x^x$.
2) Trouver tous les $x \in \mathbb{R}_+^*, x^x = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

6 Déterminer la limite en $+\infty$ des fonctions suivantes :

1) $\ln(x) - e^x$
2) $\frac{x^3}{\exp(\sqrt{x})}$
3) $\frac{\ln(1+e^x)}{\sqrt{x}}$
4) $\frac{\exp(\sqrt{x})+1}{\exp(x^2)+1}$.

7 Démontrer que, pour tout $n \geq 2$, on a

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \leq e \leq \left(1-\frac{1}{n}\right)^{-n}.$$

Fonctions circulaires

8 Simplifier les expressions en donnant les ensembles de définition :

1) $\cos(2\operatorname{Arccos}(x))$
2) $\cos(2\operatorname{Arcsin}(x))$
3) $\sin(2\operatorname{Arccos}(x))$
4) $\cos(2\operatorname{Arctan}(x))$
5) $\sin(2\operatorname{Arctan}(x))$
6) $\tan(2\operatorname{Arcsin}(x))$

9 Simplifier l'expression $\operatorname{Arcsin}\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)$ en donnant avant tout l'ensemble de définition.

10 Simplifier $\operatorname{Arctan}\frac{1}{2} + \operatorname{Arctan}\frac{1}{5} + \operatorname{Arctan}\frac{1}{8}$.

11 Résoudre les équations d'inconnue $x \in \mathbb{R}$:

1) $\operatorname{Arcsin}(x) = \operatorname{Arcsin}\frac{4}{5} + \operatorname{Arcsin}\frac{5}{13}$

2) $\operatorname{Arcsin}(\tan(x)) = x$

3) $\operatorname{Arctan}(x) + \operatorname{Arctan}(\sqrt{3}x) = \frac{7\pi}{12}$

4) $\operatorname{Arcsin}\left(\frac{\tan x}{2}\right) = x$

5) $\operatorname{Arccos}\left(\frac{1}{3}\right) + \operatorname{Arccos}\left(\frac{1}{4}\right) = \operatorname{Arcsin}(x)$.

12 Résoudre les équations suivantes d'inconnue $x \in \mathbb{R}$:

1) $\cos(2x - \pi/3) = \sin(x + 3\pi/4)$

2) $\cos^4(x) + \sin^4(x) = 1$

3) $\sin(x) + \sin(3x) = 0$

4) $\sin(x) + \sin(2x) + \sin(3x) = 0$

5) $3\cos(x) - \sqrt{3}\sin(x) = \sqrt{6}$

6) $2\sin(x)\cos(x) + \sqrt{3}\cos(2x) = 0$

7) $\tan(x)\tan(2x) = 1$.

13 ★★★ Montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \cos(\sin(x)) > \sin(\cos(x))$$

Fonctions hyperboliques

14 Démontrer que, pour tous $x, y \in \mathbb{R}$,

$$\operatorname{sh}(x+y) = \operatorname{sh}(x)\operatorname{ch}(y) + \operatorname{ch}(x)\operatorname{sh}(y)$$
$$\operatorname{ch}(x+y) = \operatorname{ch}(x)\operatorname{ch}(y) + \operatorname{sh}(x)\operatorname{sh}(y).$$

15 Pour $n \in \mathbb{N}$ et $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, calculer :

$$C = \sum_{k=0}^{n} \operatorname{ch}(a+kb) \text{ et } S = \sum_{k=0}^{n} \operatorname{sh}(a+kb)$$

16 Etablir que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \operatorname{Arctan}(\operatorname{sh} x) = \operatorname{Arccos}\left(\frac{1}{\operatorname{ch} x}\right)$$

17 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1) $5\operatorname{ch}(x) - 3\operatorname{sh}(x) = 4$

2) $3\operatorname{sh}(x) - \operatorname{ch}(x) = 1$

3) $\operatorname{ch}^5(x) - \operatorname{sh}^5(x) = 1$

18 Démontrer les inégalités suivantes, valables pour tout $x \geq 0$:

$$\operatorname{sh}(x) \geq x, \operatorname{ch}(x) \geq 1 + \frac{x^2}{2}$$

19 On pose $f : x \mapsto \ln\left(\sqrt{\frac{1+\operatorname{th}(x)}{1-\operatorname{th}(x)}}\right)$.

1) Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f.

2) Simplifier f.

20 (Formules de l'angle moitié, version hyperbolique). Soit $x \in \mathbb{R}$. On pose $t = \operatorname{th}\left(\frac{x}{2}\right)$. Exprimer $\operatorname{sh}(x), \operatorname{ch}(x)$ et $\operatorname{th}(x)$ en fonction de t.

Fonctions à valeurs complexes

Exemple 1

Soit $f : I \to \mathbb{C}$ dérivable. Montrer que $\bar{f}$ est dérivable.

Exemple 2

Soit $a \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$ et $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$:

$$t \longmapsto \frac{1}{t-a}$$

Pour $n \in \mathbb{N}$, donner l'expression de sa dérivée n-ième.