L'usage de la calculatrice est interdit. Les raisonnements présentés devront être soigneusement justifiés et détaillés, quelques points seront dédiés à la présentation, l'orthographe et la propreté de votre copie. En particulier, ***il est IMPERATIF de souligner les résultats obtenus****. Il n'est pas nécessaire de répondre à l'ensemble des questions pour avoir une bonne note. Si vous ne parvenez pas à résoudre une question, vous pouvez admettre le résultat dans la suite de l'énoncé.Lisez bien tout le sujet avant de commencer et identifiez les parties plus simples pour vous, et commencez par ces parties.*

I Questions préliminaires

Exercice n° 1

1) a) $\exists T \in \mathbb{R}_+^*, \forall x \in \mathbb{R}, f(x+T) = f(x)$.

b) $\forall x \in \mathbb{R}, f(-x) = f(x)$.

c) $\exists M \in \mathbb{R}, \forall x \in \bar{R}, |f(x)| \leq M$

d) Beaucoup d'erreurs sur cette question. Pour être monotone, il faut soit être croissant, soit être décroissant, on peut donc exprimer cette proposition en utilisant les quantificateurs pour la croissance ou la décroissance :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, x < y \Rightarrow f(x) \leq f(y) \text{ OU } \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, x < y \Rightarrow f(x) \geq f(y).$$

Il est important que le **OU** soit à cet endroit là, si on écrit

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, x < y \Rightarrow f(x) \leq f(y) \text{ OU } f(x) \geq f(y)$$

on n'a essentiellement rien dit.

2) On raisonne par analyse synthèse (À bien revoir, réussi par très peu d'entre vous).

Analyse : Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, supposons que f s'écrive comme la somme d'une fonction $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ affine et d'une fonction $h : [0,1] \to \mathbb{R}$ qui s'annule en 0 et en 1.

On a donc $f = g + h(\bigstar)$.

De plus, comme g est affine, il existe $(a,b) \in \mathbb{R}^2, \forall x \in [0,1], g(x) = ax + b$.

On va utiliser les propriétés de h en 0 et en 1 pour déterminer a et b.

D'après $(\bigstar)$, on a :

$$\begin{aligned} f(0) &= g(0) + h(0) \\ &= a.0 + b + h(0) \\ &h \text{ s'annule en } 0 b \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} f(1) &= g(1) + h(1) \\ &= a.1 + b + h(1) \\ &h \text{ s'annule en } 1 a + b \end{aligned}$$

En combinant les 2 équations précédentes, on obtient $b = f(0)$ et $a = f(1) - f(0)$.

On a donc $g : x \mapsto (f(1) - f(0))x + f(0)$. On en déduit que $h : x \mapsto f(x) - g(x) = f(x) - ((f(1) - f(0))x + f(0))$.

Nous avons déterminé des conditions sur les fonctions g et h, vérifions que les fonctions ainsi posées vérifient bien les hypothèses de l'énoncé :

Synthèse :

Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, posons, $g : x \mapsto (f(1) - f(0))x + f(0)$ et $h : x \mapsto f(x) - g(x) = f(x) - ((f(1) - f(0))x + f(0))$.

Soit $x \in [0,1]$,

$$g(x) + h(x) = (f(1) - f(0))x + f(0) + f(x) - ((f(1) - f(0))x + f(0)) = f(x)$$

On a donc bien $f = g + h$.

De plus par définition, g est une fonction affine. Vérifions que h s'annule en 0 et en 1.

$$h(0) = f(0) - ((f(1) - f(0)).0 + f(0)) = 0.$$

$$h(1) = f(0) - ((f(1) - f(0)).1 + f(0)) = 0.$$

h s'annule en 0 et en 1.

On a donc montré que pour toute fonction $f : [0;1] \to \mathbb{R}$ est la somme d'une fonction affine et d'une fonction qui s'annule en 0 et en 1.

3) Dans cette question on peut raisonner par récurrence forte ou récurrence simple. Pour l'exercice, donnons le raisonnement par récurrence forte :
On raisonne par récurrence forte, Soit $P(n)$ la proposition "$u_n \leq 2^n$".
$P(0)$ s'écrit $u_0 \leq 2^0$ ce qui est vrai car $u_0 = 1$.
La propriété est donc vraie au rang 0. Soit $n \in \mathbb{N}$, on suppose la propriété vraie pour tout rang $k \leq n$.
on a :

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= \sum_{k=0}^{n} u_k \\ &\leq \text{ (Hypothèse de récurrence) } \sum_{k=0}^{n} 2^k \\ &= \frac{1-2^{n+1}}{1-2} \\ &= 2^{n+1} - 1 \\ &\leq 2^{n+1}. \end{aligned}$$

On a donc prouvé la proposition au rang $n+1$.
Par théorème de récurrence forte, on a pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n \leq 2^n$.

4) a) $\forall x \in \mathbb{Z}, x \in \mathbb{R}$.

b) Attention, ne pas confondre être une fonction constante avec une fonction de signe constant :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \leq 0 \text{ OU } \forall x \in \mathbb{R}, f(x) \geq 0.$$

c) $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$

d) Réciproque : (n n'est pas un entier premier) $\Rightarrow \left(\exists p \in \mathbb{N}, p^2 = n\right)$
Contraposée : (n est un entier premier) $\Rightarrow \left(\forall p \in \mathbb{N}, p^2 \neq n\right)$.
Pour déprouver la réciproque, il nous suffit de trouver un nombre non premier qui ne soit pas le carré d'un entier, par exemple $6 = 2.3$ n'est pas premier mais n'est pas non plus le carré d'une entier. La réciproque est donc fausse.

5) a) On peut traduire cette phrase par " la fonction $x \mapsto x^2$ est majorée."
la négation de cette proposition est $\forall M \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R}, x^2 > M$.
Pour prouver que la proposition est fausse on va prouver sa négation.
Soit $M \in \mathbb{R}_+$, si $M \leq 0$, $1^2 > M$. Sinon, on pose $x = \sqrt{M} + 1$. Comme $\sqrt{M} + 1 > \sqrt{M}$, par stricte croissance de la fonction carrée sur $\mathbb{R}_+, x^2 > M$.
On a donc prouvé que $\forall M \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R}, x^2 > M$.

b) On peut traduire cette phrase par Pour tout nombre dans $]0, 1]$, il existe un autre nombre dans $[0, 1]$ strictement plus petit.
Cette proposition est vraie. Pour le prouver, prenons $m \in]0, 1]$ et posons $x = \frac{m}{2}$. On a $0 < x = \frac{m}{2} < m \leq 1$.
On a donc bien prouvé la propossition.

6) On revient à la définition de la partie entière :
Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, on a :

$$\lfloor a \rfloor \leq a < \lfloor a \rfloor + 1$$

et

$$\lfloor b \rfloor \leq b < \lfloor b \rfloor + 1$$

.
En sommant ces 2 inéquations, on obtient :

$$\lfloor a \rfloor + \lfloor b \rfloor \leq a + b < \lfloor a \rfloor + \lfloor b \rfloor + 2$$

Par croissance de la fonction partie entière, on a :

$$\lfloor \lfloor a \rfloor + \lfloor b \rfloor \rfloor \leq \lfloor a + b \rfloor < \lfloor \lfloor a \rfloor + \lfloor b \rfloor + 2 \rfloor$$

En prenant en compte le fait que la partie entière d'un nombre entier est lui même, on a donc :

$$\lfloor a \rfloor + \lfloor b \rfloor \leq \lfloor a + b \rfloor < \lfloor a \rfloor + \lfloor b \rfloor + 2$$

La première inéquation demandée est donc vérifiée. Pour obtenir la seconde, il faut se rendre compte que $\lfloor a+b \rfloor$ et un entier, donc si il est strictement inférieur à un autre entier n c'est qu'il est inférieur ou égal à $n-1$. Appliqué dans ce contexte on a donc :

$$\lfloor a \rfloor + \lfloor b \rfloor \leq \lfloor a+b \rfloor \leq \lfloor a \rfloor + \lfloor b \rfloor + 1$$

7) On applique la méthode de négation vu en cours, en oubliant pas que la négation de $P \Rightarrow Q$ est P et non Q. :

$$\neg(\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in \mathbb{R}, \quad \left(|x| < \alpha \Rightarrow \left|\frac{\sqrt{x}}{x^2+1}\right| < \varepsilon\right)) = \exists \varepsilon > 0, \forall \alpha > 0, \exists x \in \mathbb{R}, \quad \left(|x| < \alpha \text{ et } \left|\frac{\sqrt{x}}{x^2+1}\right| \geq \varepsilon\right)$$

Exercice n°2

1) Cette inéquation est définie sur $\mathbb{R}$. On sépare en 3 cas : $x < 0, 0 \leq x \leq 1, x > 1$.
Dans le cas $x < 0$, l'équation devient $1-2x = 1$, soit $x = 0$, il n'y a donc pas de solutions.
Dans le cas $x > 1$, l'équation deviént $2x-1 = 1$ soit $x = 1$, il n'y a donc pas de solutions.
Enfin, dans le cas $0 \leq x \leq 1$, l'équation devient $1 = 1$ qui est donc vrai pour tous les éléments de $[0,1]$.
On a donc $S = [0,1]$.

2) L'ensemble de définition, de par la racine est $[-1,+\infty[$.
Il y a alors 2 façon de résoudre cette question : 1) Analyse-synthèse 2) on remarque que pour que $\sqrt{x-1} = 2-x$, il faut que $2-x$ soit positif. C'est le cas sur $]-1,2]$. En se plaçant sur cette ensemble, on va pouvoir manipuler directement des équivalences :
Sur cet ensemble on a :

$$\begin{aligned} \sqrt{x-1} = 2-x &\Leftrightarrow x-1 = (2-x)^2 \\ &\Leftrightarrow x^2 - 5x + 5 = 0 \\ &\Leftrightarrow x = \frac{5-\sqrt{5}}{2} \text{ OU } x = \frac{5+\sqrt{5}}{2} \end{aligned}$$

Or on remarque que $\frac{5+\sqrt{5}}{2} > 2$, il n'est donc pas dans l'intervalle considéré, mais c'est le cas pour $\frac{5-\sqrt{5}}{2}$ (on peut le vérifier de plusieurs façons).
L'unique solution est donc $x = \frac{5-\sqrt{5}}{2}$.

3) L'ensemble de définition est $]-\infty, 1] \backslash \{-1\}$.
Sur cet ensemble, on remarque que si $x < -1$, $\frac{1}{x+1} \leq \sqrt{1-x}$ car $\frac{1}{x+1}$ est alors négatif.
Si $x > -1$, par croissance de la fonction carrée, l'équation devient $(x+1)^2(1-x) - 1 \geq 0$. Soit :

$$x(x^2 + x - 1) \geq 0.$$

L'étude de signe nous donne alors $S =]-\infty, -1[\cup [0, \frac{\sqrt{5}-1}{2}]$.

4) De même que pour la question 1, on fait une disjonction de cas selon les 3 cas suivants :
$x < \frac{-3}{2} \leq \frac{-3}{2} \leq x \leq \frac{7}{5} \leq, x > \frac{7}{5}$.
On obtient en conséquence $S =]\frac{4}{7}, \frac{10}{3}[$

Exercice n°3

1) Le seul cas où $P \uparrow Q$ est fausse est celui où $P \wedge Q$ est vraie, c'est-à-dire quand P et Q sont vraies toutes les deux :

P	Q	$P \uparrow Q$
V	V	F
V	F	V
F	V	V
F	F	V

2) Le plus simple ici est de faire une table de vérité pour chacune des deux propositions pour pouvoir les comparer, en se rappelant que le «non et » est faux seulement quand ses deux composants sont vrais.

P	Q	R	$P \uparrow Q$	$(P \uparrow Q) \uparrow R$	$Q \uparrow R$
V	V	V	F	V	F
V	V	F	F	V	V
V	F	V	V	F	V
V	F	F	V	V	V
F	V	V	V	F	F
F	V	F	V	V	V
F	F	V	V	F	V
F	F	F	V	V	V

Les deux colonnes qui nous intéressent ne sont pas du tout identique, le connecteur $\uparrow$ n'est donc pas «associatif».

3) Il suffit en fait de constater que $P = P \wedge P$, donc $\neg P = \neg(P \wedge P) = P \uparrow P$.

4) Commençons par le plus simple : par définition $P \wedge Q = \neg(P \uparrow Q)$, donc en exploitant la question pré cédente $P \wedge Q = (P \uparrow Q) \uparrow (P \uparrow Q)$ (les cour ageux vérifieront que ça marche à coups de tables de vérité). Pour le «ou», on a intérêt à utiliser les lois de Morgan : $P \vee Q = \neg((\neg P) \wedge (\neg Q)) = \neg((P \uparrow P) \wedge (Q \uparrow Q)) = \neg(((P \uparrow P) \uparrow (Q \uparrow Q)) \uparrow ((P \uparrow P) \uparrow (Q \uparrow Q))) = (((P \uparrow P) \uparrow (Q \uparrow Q)) \uparrow ((P \uparrow P) \uparrow (Q \uparrow Q))) \uparrow (((P \uparrow P) \uparrow (Q \uparrow Q)) \uparrow ((P \uparrow P) \uparrow (Q \uparrow Q)))$. C'est complètement atroce mais ça répond à la question. On peut en fait trouver une expression plus simple si on le souhaite vraiment.

5) L'implication est fausse si et seulement si P est vraie et Q est fausse. On peut donc dire qu'elle est équivalente à $\neg(P \wedge (\neg Q))$ (là encore, une table de vérité convaincra les plus dubitatifs). On peut donc écrire $P \Rightarrow Q = \neg((P \uparrow (Q \uparrow Q)) \uparrow (P \uparrow (Q \uparrow Q))) = ((P \uparrow (Q \uparrow Q)) \uparrow (P \uparrow (Q \uparrow Q))) \uparrow ((P \uparrow (Q \uparrow Q)) \uparrow (P \uparrow (Q \uparrow Q)))$. Pour l'équivalence, il ne reste plus qu'à faire un «et » avec l'implication réciproque : $P \Leftrightarrow Q = (((P \uparrow (Q \uparrow Q)) \uparrow (P \uparrow (Q \uparrow Q))) \uparrow ((P \uparrow (Q \uparrow Q)) \uparrow (P \uparrow (Q \uparrow Q))) \uparrow ((Q \uparrow (P \uparrow P)) \uparrow (Q \uparrow (P \uparrow P))) \uparrow ((Q \uparrow (P \uparrow P)) \uparrow (Q \uparrow (P \uparrow P)))) \uparrow (((P \uparrow (Q \uparrow Q)) \uparrow (P \uparrow (Q \uparrow Q))) \uparrow ((P \uparrow (Q \uparrow Q)) \uparrow (P \uparrow (Q \uparrow Q))) \uparrow ((Q \uparrow (P \uparrow P)) \uparrow (Q \uparrow (P \uparrow P))) \uparrow ((Q \uparrow (P \uparrow P)) \uparrow (Q \uparrow (P \uparrow P))))$. Là encore, on peut (heureusement) faire beaucoup plus rapide...

II Problèmes

Problème n° 1

Partie 1 : Signification de la convergence d'une suite

1) a) Par définition de la fonction partie entière, on a pour $\varepsilon > 0$,

$$\frac{1}{\varepsilon} < \lfloor \frac{1}{\varepsilon} \rfloor + 1$$

En passant à l'inverse (et en gardant à l'esprit que l'inverse d'un nombre positif est toujours positif, on obtient) :

$$0 \leq \frac{1}{\left\lfloor \frac{1}{\varepsilon} \right\rfloor + 1} \leq \varepsilon$$

b) Soit $\varepsilon > 0$, d'après la question précédente, en posant $N = \left\lfloor \frac{1}{\varepsilon} \right\rfloor + 1$ qui est un nomre entier comme somme de nombres entiers, on a $v_N = \frac{1}{N} = \frac{1}{\left\lfloor \frac{1}{\varepsilon} \right\rfloor + 1} \leq \varepsilon$.

c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $0 < n \leq n+1$.
En passant à l'inverse, on obtien :t donc :

$$\frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{n}.$$

Ce qui se réécrit :

$$v_{n+1} \leq v_n.$$

On a montré cette propriété pout tout $n \in \mathbb{N}$, la suite est donc bien décroissante.

d) Le théorème de la convergence monotone nous donne la convergence de la suite d'après les questions précédentes mais pas la valeur vers laquelle converge cette suite. Pour ceci il faut que nous revenions à la définition de limite proposée dans cet exercice ;
Soit > 0, d'après la question b), il existe $N \in \mathbb{N}, v_N \leq \varepsilon$. De plus par décroissance de la suite (v_n) prouvée à la question précédente, on a que pour tout $n \geq N, v_n \leq v_N \leq \varepsilon$.
On a donc montré que :

$$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq N \Rightarrow |v_n - 0| \leq \epsilon$$

La suite (v_n) converge donc vers 0.

2) On revient ici encore à la définition :

$$\begin{aligned} w_n \text{ converge vers } l &\Leftrightarrow \forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq N \Rightarrow |w_n - l| \leq \epsilon \\ &\Leftrightarrow \forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq N \Rightarrow |(w_n - l) - 0| \leq \epsilon \\ &\Leftrightarrow (w_n - l) \text{ converge vers } 0 \\ &\Leftrightarrow \forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq N \Rightarrow ||(w_n - l)| - 0|| \leq \epsilon \\ &\Leftrightarrow |(w_n - l)| \text{ converge vers } 0. \end{aligned}$$

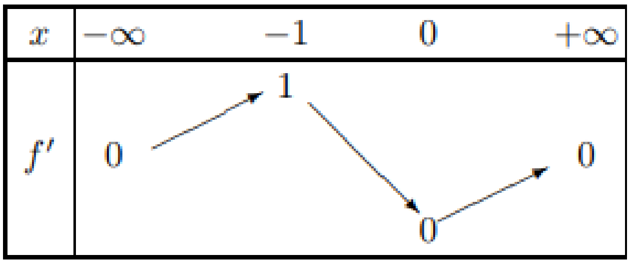

FIGURE 1 – Enter Caption

3) a) Voir cours.

b) Soit $N = \max(N_1, N_2)$. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq N$ on a alors $n \geq N_1$ et $n \geq N_2$ donc on a :

$$|v_n - l_1| \leq \varepsilon \text{ et } |v_n - l_2| \leq \varepsilon.$$

Pour cette valeur de N, on a montré que :

$$n \geq N \Rightarrow |v_n - l_1| \leq \varepsilon \text{ et } |v_n - l_2| \leq \varepsilon.$$

c) Schématiquement l'idée est la suivante : Si il me faut 3 pas pour aller de l_1 à l_2, je ne peut pas être à moins d'1 pas de l_1 et de l_2 en même temps. Formalisons ceci.
Supposons par l'absurde que (v_n) admettent pour limite l_1 et l_2. Pour $\varepsilon = \frac{|l_1 - l_2|}{3}$ (qui est strictement positif car l_1 et l_2 sont différents), comme l_1 et l_2 sont des limites de v_n, on a :
Il existe $(N_1, N_2) \in \mathbb{N}^2$ tels que pour tout $n \in \mathbb{N}$ - Si $n \geq N_1, |v_n - l_1| \leq \varepsilon$ - Si $n \geq N_2, |v_n - l_2| \leq \varepsilon$.
D'après la question précédente,si on pose $N = \max(N_1, N_2)$, on a pour $n \geq N$,$|v_n - l_1| \leq \varepsilon$ et $|v_n - l_2| \leq \varepsilon$. Montrons que ceci n'est pas possible :
Soit $n \geq N$, par inégalité triangulaire, on a :

$$\begin{aligned} |l_1 - l_2| &= |(l_1 - v_n) - (l_2 - v_n)| \\ &\leq |(l_1 - v_n)| + |(l_2 - v_n)| \\ &\leq 2\varepsilon \\ &= \frac{2}{3}|l_1 - l_2|. \end{aligned}$$

En divisant par $|l_1 - l_2|$ aux 2 extrémités de cette inégalité (ce qu'on peut faire car $|l_1 - l_2| \neq 0$), on arrive donc à $1 \leq \frac{2}{3}$, ce qui est une contradiction.
Une suite ne peut donc avoir 2 limites différentes.

Partie 2 : Etude de fonctions et de suites

1) Le dénominateur de la fraction définissant f ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$ car polynôme de dgré 2 de discrimant $\Delta = 1 - 4.1.1 = -3 < 0$.
f est donc définie sur $\mathbb{R}$

2) Toutes les fonctions manipulées dans cet exercice sont des fonctions rationnelles dérivable sur tout leur ensemble de définition. On calcule d'abord, $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = -\frac{2x+1}{(x^2+x+1)^2}$, puis en dérivant f' comme un produit, $f''(x) = -\frac{2}{(x^2+x+1)^2} - (2x+1) \times \frac{-2(2x+1)}{(x^2+x+1)^3} = \frac{2(2x+1)^2 - 2(x^2+x+1)}{(x^2+x+1)^3} = \frac{8x^2+8x+2-2x^2-2x-2}{(x^2+x+1)^3} = \frac{6x(x+1)}{(x^2+x+1)^3}$.

3) La dérivée seconde f'' est du signe de $x(x+1)$ (le dénominateur est toujours du signe de $x^2 + x + 1$, donc positif), donc négative uniquement entre -1 et 0 . Les seules limites à calculer sont celles en $-\infty$ et en $+\infty$ qui sont toutes les deux nulles, pour f' comme pour f, car on un quotient de polynômes dont le dénominateur est de degré strictement plus grand que le numérateur. Reste à calculer $f'(0) = -1$ et $f'(-1) = 1$ pour compléter le tableau de variations de f' :
La dérivée f' est du signe de $-(2x + 1)$ et s'annule en particulier pour $x = -\frac{1}{2}$. On a déjà précisé les limites de f, il ne reste plus qu'à cal culer l'or donnée du maximum $f\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4}} = \frac{4}{3}$.

4) On se contentera d'indiquer la tangente horizontale au maximum sur la courbe ainsi que les valeurs remarquables (voir figure ci-dessus)

5) Par décroissance de la fonction f sur $[0, +\infty[$, si $\frac{1}{3} \leqslant x \leqslant 1$, alors $f(1) \leqslant f(x) \leqslant f\left(\frac{1}{3}\right)$. Comme $f(1) = \frac{1}{3}$ et $f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{\frac{1}{9} + \frac{1}{3} + 1} = \frac{9}{13} < 1$, on obtient bien $\frac{1}{3} \leqslant f(x) \leqslant 1$, donc l'intervalle est stable.

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		$+\infty$
f			$\frac{4}{3}$		
	0	$\nearrow$		$\searrow$	0

FIGURE 2 – Enter Caption

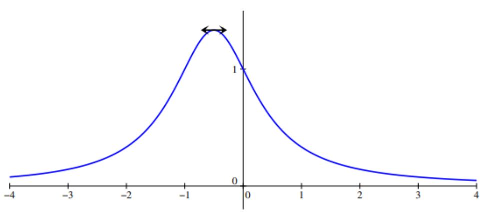

FIGURE 3 – Enter Caption

6) La dérivée f' est strictement croissante et négative sur l'intervalle I, la valeur maximale atteinte par $|g'|$ sur cet intervalle est donc $\left|g'\left(\frac{1}{3}\right)\right| = \frac{\frac{2}{3}+1}{\left(\frac{1}{9}+\frac{1}{3}+1\right)^2} = \frac{\frac{5}{3}}{\frac{169}{81}} = \frac{135}{169}$. On peut en déduire que $\forall x \in I, |g'(x)| \leqslant C$, avec $C = \frac{135}{169} \in \left]0,1\right[$.

7) La fonction $z : x \mapsto x^3 + x^2 + x + 1$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ comme fonction polynomiale et, $\forall x \in \mathbb{R}, z'(x) = 3x^2+2x+1$. Le discriminant de cette dérivée est $\Delta = 4-12 < 0$, donc z' est toujours positive et z strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Comme $\lim_{x\to-\infty} z(x) = -\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} z(x) = +\infty$, la fonction z est bijective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. En particulier, l'équation $z(x) = 0$ admet une unique solution. Or, $z(x) = 0 \Leftrightarrow x^3+x^2+x = 1 \Leftrightarrow x\left(x^2+x+x\right) = 1 \Leftrightarrow x = f(x)$, ce qui prouve que cette unique solution est également l'unique solution de l'équation $f(x) = x$. En posant $g(x) = f(x) - x$, la fonction g est continue et vérifie $g\left(\frac{1}{3}\right) = f\left(\frac{1}{3}\right) - \frac{1}{3} = \frac{9}{13} - \frac{1}{3} = \frac{14}{39} > 0$ et $g(1) = f(1) - 1 = \frac{1}{3} - 1 = -\frac{2}{3} < 0$, le théorème des valeurs intermédiaires assure donc que la fonction g s'annule (au moins) une fois dans l'intervalle I. Comme on sait déjà que g s'annule une seule fois sur $\mathbb{R}$ tout entier, la valeur d'annulation l de la fonction g appartient nécessairement à l'intervalle I.

8)
  a) On raisonne par récurrence : $u_0 \in I$ par définition, et $u_n \in I \Rightarrow f(u_n) \in I$ d'après la question 5 . Comme $f(u_n) = u_{n+1}$, cela prouve l'hérédité, et la propriété ´$u_n \in I \gg$ est donc vérifiée pour tout entier naturel n.

  b) Puisqu'on sait que $l \in I$ et $u_n \in I$, il suffit d'appliquer l'inégalité donnée dans la question 6 à $x = l$ (qui vérifie bien $f(x) = f(l) = l$) et à $y = u_n$, pour lequel $f(y) = f(u_n) = u_{n+1}$. On trouve immédiatement l'inég alité souhaitée.

  c) C'est une récurrence tout à fait classique exploitant les questions précédentes : puisque $l \in I$, $|u_0 - l| = |1 - l| \leqslant \frac{2}{3}$, ce qui prouve largement l'initialisation au rang 0 (on doit prouver que $|u_0 - l| \leqslant C^0 = 1$). Ensuite, si on suppose $|u_n - l| \leqslant C^n$, on en déduira $|u_{n+1} - l| \leqslant C|u_n - l| \leqslant C \times C^n = C^{n+1}$ en appliquant successivement le résultat de la question précédent et l'hy pothèse de récurrence. Ceci achève de prouver l'hérédité.

  d) On sait que $0 \leqslant |u_n - l| \leqslant C^n$, avec $\lim_{n\to+\infty} C^n = 0$ (suite géométrique de raison strictement comprise entre -1 et 1). D'après le théorème des gendarmes, on aur a donc $\lim_{n\to+\infty} |u_n - l| = 0$, c'est-à-dire $\lim_{n\to+\infty} u_n = l$.

  e) Pour obtenir une valeur approchée à 10^{-3} près de l, il faut trouver un réel x tel que $|x - u_n| \leqslant 10^{-3}$. Les questions précédentes prouvent que ce sera le cas du réel u_n si $C^n \leqslant 10^{-3}$ (et même probablement avant car on a une simple majoration et non une égalité). Cette dernière condition est vérifiée si $n\ln(C) \leqslant -3\ln(10)$, soit $n \geqslant \frac{-3\ln(10)}{\ln(C)}$ (attention au changement de sens des inég alités, comme $C \in]0,1[, \ln(C) < 0$). Si on avait une calculatrice sous la main, on pourrait calculer la valeur de $n_0 = \mathrm{Ent}\left(\frac{-3\ln(10)}{\ln(C)}\right) + 1$ (l'ajout d'une unité assure que le nombre entier obtenu est supérieur à la borne souhaitée), puis la valeur de u_{n_0} qui fournira la valeur approchée demandée.

Problème n° 2

Partie 1 : Minoration par une fonction rationnelle

Remarque importante : La définition de f n'est pas passé dans le sujet final ce qui rendait certaines questions infaisable. J'ai accordé des points lorsque les réponses étaient cohérentes.

1) La fonction h est définie et dérivable sur l'intervalle $]-1,+\infty[$ (intervalle de définition de f) comme somme de fonctions usuelles dérivables, et $\forall x > -1, h'(x) = \frac{1}{1+x} - \frac{2(x+2)-2x}{(x+2)^2} = \frac{1}{1+x} - \frac{4}{(x+2)^2} = \frac{(x+2)^2-4(1+x)}{(1+x)(x+2)^2}$. Le numérateur se simplifie merveilleusement bien : $(x+2)^2 - 4(1+x) = x^2+4x+4-4-4x = x^2$, on obtient finalement $h'(x) = \frac{x^2}{(1+x)(x+2)^2}$.

2) L'expression obtenue est manifestement positive sur tout l'intervalle $[0,+\infty[$, la fonction h y est donc croissante. De plus, $h(0) = \ln(1) - 0 = 0$, et $\lim_{x\to+\infty} h(x) = +\infty$ (pas de difficulté ici, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} g(x) = 2$ en utilisant le quotient des termes de plus haut degré). On peut donc dresser le tableau suivant :

x	0	$+\infty$
h		$++\infty$
	0	

3) Les variations de h et la valeur calculée pour $h(0)$ prouvent que h reste positive sur tout l'intervalle $[0,+\infty[$, ce qui signifie bien que, $\forall x \geqslant 0, f(x) \geqslant g(x)$. La fonction g minore donc f sur $[0,+\infty[$.

4) On sait déjà que $f(0) = g(0) = 0$. Calculons maintenant les valeurs des dérivées en 0 . Comme $f'(x) = \frac{1}{1+x}$ et $g'(x) = \frac{4}{(x+2)^2}$ (cf calcul de la dérivée de h), on constate que $f'(0) = g'(0) = 1$. Les deux courbes auront donc une tangente commune d'équation $y = x$ en 0 .

Partie 2 : Une famille de fonctions majorantes

5) La fonction f_1 est certainement dérivable sur $\mathbb{R}^+$et, $\forall x \geqslant 0, f_1'(x) = \frac{1}{1+x} - 1 = -\frac{x}{1+x}$. Cette dérivée étant négative sur $\mathbb{R}^+$, la fonction f_1 y sera décroissante. On calcule facilement $f_1(0) = 0$, mais la limite en $+\infty$ est plus problématique : $f_1(x) = x\left(\frac{\ln(1+x)}{x} - 1\right)$, et il faut connaitre le résultat de croissance comparée $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(1+x)}{x} = 0$ pour pouvoir conclure que $\lim_{x\to+\infty} f_1(x) = -\infty$.

6) Les calculs de la question précédente montrent que f_1 est négative sur $\mathbb{R}$, donc que, $\forall x \geqslant 0$, $\ln(1+x) \leqslant x$. Bien entendu, si cette majoration est vrai, on aur a a fortiori $\ln(1+x) \leqslant kx$ pour tout réel $k \geqslant 1$ puisque $x \leqslant kx$ lorsque x est positif. Toutes les fonctions $x \mapsto kx$ avec $k \geqslant 1$ sont donc minorée par f.

7) Le cal cul de dérivée est pratiquement le même que précédemment : $f_k'(x) = \frac{1}{1+x} - k = \frac{1-k-kx}{1+x}$. Cette dérivée s'annule effectivement lorsque $kx = 1-k$, donc pour $x = \frac{1-k}{k}$, qui est bien une valeur positive lorsque $k \in]0,1[$.

8) Le coefficient directeur du numérateur de f_k' étant négatif, la dérivée sera positive sur l'intervalle $\left[0, \frac{1-k}{k}\right]$ et négative sur l'intervalle $\left[\frac{1-k}{k}, +\infty\right[$. On peut donc dresser le tableau suivant :

x	0	$\frac{1-k}{k}$	$+\infty$
f_k	0	m	$-\infty$

La limite en $+\infty$ reste égale à $-\infty$, mais comme le demandait l'énoncé, on ne la détaillera pas.

9) Inutile de chercher à calculer la valeur précise du maximum m, le fait que $f_k(0) = 0$ et la croissante de f_k sur $\left[0, \frac{1-k}{k}\right]$ suffisent à affirmer que $m > 0$.

10) Les calculs précédents prouvent que f_k ne garde pas un signe négatif sur $\mathbb{R}^+$quand $k \in]0,1[$, et donc que $x \mapsto kx$ ne majore pas f dans ce cas. C'est bien sûr encore moins le cas si $k \leqslant 0$ puisque la fonction f_k est alors positive sur tout l'intervalle $[0, +\infty[$. En conclusion, f minore $x \mapsto kx$ si et seulement si $k \geqslant 1$.