Chapitre 10 : Ensembles et applications

A) Ensembles

- Notion d'ensemble, d'éléments
- Parties, inclusions,appartenance
- Preuve égalité par double inclusion
- Intersection,réunion,complémentaire,intersection.
- Produit cartésien
- Ensemble des parties d'un ensemble

B) Applications/Fonctions

- Applications, ensemble de départ,ensemble d'arrivée
- Image,antécédent d'un élément.
- Graphe d'une fonction.
- Fonction identité, fonction indicatrice d'un ensemble
- Egalité d'applications
- Restriction et prolongements.
- Images directes/images réciproques
- Injection, surjection, bijection
- Notion de bijection réciproque, équivalence entre l'existence d'une bijection réciproque et la bijectivité d'une fonction.
- La composée de fonctions injective/surjective/bijective est injective/surjective/bijective

Les notions de famille d'éléments et de relations binaires n'ont pas été abordées ; elles seront vu dans le chapitre consacré aux relations binaires.

Chapitre 11 : Nombres réels et suites numériques

A) L'ensemble des nombres réels

- Propriété de la borne supérieure/inférieure sur $\mathbb{R}$.
- Caractérisation de la borne supérieure (classique et avec des ε.)
- Caractérisation des intervalels de $\mathbb{R}$ comme les uniques parties convexes de $\mathbb{R}$.
- Partie entière : $\mathbb{R}$ est archimédien, preuve de l'existence de la partie entière
- Approximation des réels par les décimaux.
- Parties denses dans $\mathbb{R}$
- $\mathbb{D}, \mathbb{Q}$ et $\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$ sont denses dans $\mathbb{R}$.

C)Généralités sur les suites réelles

- Terme général, famille d'éléments indexés sur $\mathbb{N}, \mathbb{N}^*$ ou $[n_0, +\infty[$
- Définition $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$
- somme, produit, multiplication par un réel d'une suite
- relation d'ordre
- suite majorée, minorée
- suite stationnaire

- Monotonie d'une suite (insistance sur le fait qu'on a besoin de regarder que 2 termes consécutifs)
- 3 méthodes pour prouver qu'une suites est croissante :
  a) signe $u_{n+1} - u_n$
  b) Si u est strictement positive, position de $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ par rapport à 1.
  c) Etude de fonction.
- Exemples
- Notion d' " à partir d'un certain rang"

C) Limite d'une suite réelle

- Suites convergentes : Def, visulation de la définition
- Unicité de la limite
- Toute suite bornée converge
- Caractère asymptotique de la limite
- Opérations sur les limites de suites (convergentes) :
- Produit, produit par un réel, somme, quotient,...

La divergence vers $\pm\infty$ n'a pas encore été abordée.

Questions de cours :

Les étudiants doivent impérativement savoir redonner les définitions du cours avec des quantificateurs, en particulier les notions d'image directe/réciproque, d'injectivité/surjectivité/bijectivité ainsi que la notion de limite d'une suite.

- La composée de fonctions injective/surjective/bijective est injective/surjective/bijective (le faire pour les 3).
- Soit $f : E \to F$ Montrer que : f bijective $\iff \exists f^{-1} : F \to E, f^{-1} \circ f = Id_E$ et $f \circ f^{-1} = Id_F$. (On montrera bien les deux sens de l'équivalence).
- On prouvera les propositions suivantes :
  1) $\mathbb{R}$ est archimédien (par la borne supérieure)
  2) En admettant le théorème d'approximation décimale des réels, prouver la densité de $\mathbb{D}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$.
- On prouvera les propositions suivantes :
  1) Unicité de la limite d'une suite convergente.
  2) Une suite convergente est bornée.