Chapitre 12 : Structures algébriques

A) Loi de composition interne

- Définition, loi associative, commutative, distributivité entre loi.
- Def élément neutre, unicité si existence.
- Def élément symétrisable à gauche, à droite et juste symétrisable.
- Unicité du symétrique pour une loi associative. Symétrique du produit.
- Notations additives et multiplicatives
- Itéré d'un élément (x^n ou nx)
- Parties stables, loi induite.
- Loi produit

B)Groupes

- Définition, exemples, groupe abélien/commutatif.
- Groupe des permutations d'un ensemble.
- Sous-groupes, exemples
- Morphismes de groupe
- Propriétés de bases des morphismes
- Noyau et image d'un morphisme.
- pour f morphisme de groupe, f injectif $\Leftrightarrow \ker f = \{e\}$

C)Anneaux et corps

- Définition, exemples
- Règles de calculs (0 absorbant, $a(-b) = (-a)b = -ab$,itérés,distributivité généralisée) binôme de Newton pour éléments commutants,formule de Jacobi
- Ensemble des inversibles d'un anneau.
- Diviseurs de 0 et anneaux intègres.
- Morphismes d'anneaux
- Def corps, sous-corps, tout corps est intègre.

Questions de cours :

- Soit E un monoïde (ensemble muni d'une loi de composition interne associative et d'un neutre), montrer les 3 propriétés suivantes :
  a) Il y a unicité de l'élément neutre
  b) Tout élément symétrisable admet un unique symétrique
  c) Le produit de deux éléments symétrisable est symétrisable (on donnera l'expression du symétrique).
- Soit f morphisme de groupe de G vers $G^{'}$. Montrer les 3 propriétés suivantes :
  a) $f(e) = e'$,
  b) $\forall x \in G (f(x))^{-1} = f\left(x^{-1}\right)$,
  c) $\forall x \in G \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (f(x))^n = f(x^n)$.
- Soit $(G, *)$ et $(G', +)$ deux groupes et $f : G \to G'$ un morphisme de groupes. Montrer que pour tout sous-groupe H de G, $f(H)$ est un sous-groupe de G'. En déduire que $Im(f)$ est un sous groupe de $G^{'}$
- Soit $(G, *)$ et $(G', +)$ deux groupes et $f : G \to G'$ un morphisme de groupes. Montrer que pour tout sous-groupe H' de G', $f^{-1}(H')$ est un sous-groupe de G. En déduire que $\ker f$ est un sous-groupe de G.
- Dans un anneau A, montrer les propriétés suivantes :
  a) $\forall a \in A \quad 0 \times a = a \times 0 = 0$, (0 est absorbant)
  b $\forall (a, b) \in A^2 \quad (-a) \times b = a \times (-b) = -(a \times b)$. (règle des signes)