## Problème n° 1

**Règles de Bioche et fractions rationnelles.**

On appelle fraction rationnelle trigonométrique toute fonction de la forme $f : x \mapsto \frac{P_1(\cos(x),\sin(x))}{Q_1(\cos(x),\sin(x))}$ où $P_1, Q_1$ sont des fonctions polynomiales à 2 variables.
Dit plus simplement, une fraction rationnelle trigonométrique est une fraction de somme de produit de fonctions puissance de cos et puissances de sin.
Par exemple,
$x \mapsto \frac{\cos^2(x)\sin(x)+3}{\sin(x)+\cos(x)}$ est bien une fonction trigonométrique mais $x \mapsto \frac{\cos^2(x)\sin(x)+3+x^2}{\sin(x)+\cos(x)}$ n'en est pas une car $x^2$ n'est pas une puissance de sin ou de cos.
Enseignant au lycée Louis le Grand, Charles Bioche donna des règles bien utile pour calculer les primitives de ces fractions rationnelles trigonométriques en se ramenant, par changement de variable, à des fractions rationnelles classiques qu'on sait (ou qu'on saura...) primitiver après décomposition en éléments simples.
Ces règles prennent la forme suivante :

**Règles de Bioche**

Soit $f$ une fonction trigonométrique et $x \in \mathbb{R}$ (quelconque) :

1) Si $f$ est impaire, on peut essayer de poser le changement de variables $u = \cos(x)$.
2) Si $f(\pi - x) = -f(x)$, on peut essayer de poser le changement de variables $u = \sin(x)$.
3) $f(\pi + x) = f(x)$, on peut essayer de poser le changement de variables $u = \tan(x)$.
4) Si aucune des 3 propositions précédentes n'est vérifiée, on peut essayer de poser le changement de variable $u = \tan(\frac{x}{2})$.

Ces règles/conseils, tout comme les fameuses lois de la robotique d'Asimov ont la vocation d'être essayées dans l'ordre, ce qui fait qu'on tente 1) avant 2), 2) avant 3) etc.

1) Dire quel changement de variable est préconisé par les règles de Bioche dans les cas suivants :
   $I_1 = \int_0^{\pi/4} \frac{\sin^3(t)}{1+\cos^2 t} dt$
   $I_2 = \int_0^{\pi/4} \frac{\mathrm{d}x}{\cos^4 x}$
   $I_3 = \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{2+\sin x}$
   $I_4 = \int \frac{\mathrm{d}x}{\cos x}$
2) Calculer $I_1$ et $I_2$
3) Donner une primitive de x $\mapsto \frac{x^2+3x-2}{x^2+x-3}$
4) À l'aide des règles de Bioche et des questions précédentes, calculer $I = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin^2 x \cos x + \frac{3}{2}\sin 2x - 2\cos x}{\sin^2 x + \sin x - 3} \mathrm{d}x$.

## Problème n° 2

Nous allons démontrer une version du théorème du point fixe de Banach-Picard qui s'énonce ainsi :

**Théorème de Banach-Picard :**

Soit $I$ un intervalle fermé, $k \in [0,1[$ et $f : I \to I$ une fonction vérifiant :

$$\forall (x,y) \in I^2, |f(x) - f(y)| \leq k|x-y|$$

alors la fonction $f$ admet un unique point fixe (*Un point fixe d'une fonction $f$ est un réel $a$ tel que* $f(a) = a$). De plus, toute suite $(u_n)$ telle que $u_0 \in I$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$ converge vers ce point fixe.

1) Justifier que la suite $(u_n)$ de l'énoncé est correctement définie (Montrer que $u_n$ est toujours dans l'ensemble de définition de $f$ pour que $u_{n+1} soit bien definie). Montrer que pour tout$ n $\in \mathbb{N}$, on a $|u_{n+1} - u_n| \leq k^n |u_1 - u_0|$.

3) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $|u_n - u_0| \leq \frac{1}{1-k} |u_1 - u_0|$. En déduire que la suite $(u_n)$ est bornée.

4) Justifier l'existence d'une extractrice $\varphi$ telle que $\left(u_{\varphi(n)}\right)$ converge vers un réel $l$ appartenant à $I$.

5) Grâce à une majoration bien choisie de $|f(l) - l|$, montrer que $l$ est un point fixe de $f$.

6) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}, |u_n - l| \leq k^n |u_0 - l|$. En déduire que $(\ u_n\ )$ converge vers $l$.

7) Montrer que le point fixe de $f$ trouvé à la question précédente est unique.

**Problème n° 3**

## Partie I : Sous-groupes additifs de $\mathbb{R}$

On appelle sous-groupe additif de $\mathbb{R}$ un sous-groupe de $\mathbb{R}$ pour la loi $+$ (l'addition usuelle sur les réels). Si $\alpha \in \mathbb{R}$, on note $\alpha\mathbb{Z} = \{\alpha n, n \in \mathbb{Z}\}$. On rappelle également qu'une partie $A$ de $\mathbb{R}$ est dite dense dans $\mathbb{R}$ si et seulement si pour tous $c < d$ des réels, il existe $x \in A$ tel que $c \leq x \leq d$.

1) Montrer que pour tout $\alpha \in \mathbb{R}, \alpha\mathbb{Z}$ est un sous-groupe additif de $\mathbb{R}$. Les sous-groupes additifs de $\mathbb{R}$ de cette forme sont appelés monogènes.

2) Montrer que $\mathbb{Q}$ est un sous-groupe additif dense dans $\mathbb{R}$.

3) Soit $H$ un sous-groupe additif de $\mathbb{R}$ non réduit à $\{0\}$.
   a) Si $x \in H$, que peut-on dire de $-x$ ?
   b) Justifier que $H \cap \mathbb{R}_+^*$ est non vide, en déduire que $H \cap \mathbb{R}_+^*$ possède une borne inférieure notée $a$ dans toute la suite.
   c) Démontrer que $a \geq 0$.

4) Dans cette question, on suppose que $a > 0$.
   a) Justifier que $2a$ n'est pas un minorant de $H \cap \mathbb{R}_+^*$. En déduire qu'il existe $x_1 \in H$ tel que $a \leq x_1 < 2a$.
   b) Montrer que si $x_1 > a$, alors il existe $x_2 \in H$ tel que $a \leq x_2 < x_1 < 2a$.
   c) En examinant $x_1 - x_2$, démontrer que $x_1 > a$ est absurde. En déduire que $a \in H$.
   d) Démontrer que $a\mathbb{Z} \subset H$.
   e) Soit $x \in H$, montrer que : $x - \left\lfloor \frac{x}{a} \right\rfloor a \in [0, a[$. En déduire que $x \in a\mathbb{Z}$.
   f) Conclure que $H = a\mathbb{Z}$.

5) On suppose ici que $a = 0$. On considère également $c < d$ des réels.
   a) Montrer qu'il existe $x \in H$ tel que $0 < x < d - c$.
   b) En déduire que $[c, d] \cap H \neq \emptyset$.

6) En déduire qu'un sous-groupe additif de $\mathbb{R}$ est monogène ou dense dans $\mathbb{R}$.

## Partie II : Application

**Cette partie est facultative**

1) Dans cette question, on démontre que la suite de terme général $u_n = \cos(n)$ diverge. On raisonne par l'absurde en supposant qu'il existe un réel $l$ tel que $\lim_{n \to +\infty} u_n = l$.
   a) Justifier que : $\forall n \geq 1, u_{n+1} + u_{n-1} = 2u_n \cos(1)$.

b) En déduire que $l = 0$.

c) Justifier que : $\forall n \geq 0, u_{2n} = 2u_n^2 - 1$.

d) En déduire que la suite $(u_n)$ diverge.

**2**) On pose $Y = \{\cos(n), n \in \mathbb{N}\}$ et nous allons démontrer que $Y$ est dense dans $[-1, 1]$.

a) On note $\mathbb{Z} + 2\pi\mathbb{Z} = \left\{p + 2\pi q, (p, q) \in \mathbb{Z}^2\right\}$. Démontrer que c'est un sous-groupe additif de $\mathbb{R}$.

b) Démontrer que $\mathbb{Z}+2\pi\mathbb{Z}$ ne peut s'écrire $\alpha\mathbb{Z}$ où $\alpha \in \mathbb{R}$. En déduire que $\mathbb{Z}+2\pi\mathbb{Z}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

c) Montrer que si $x \in \mathbb{Z} + 2\pi\mathbb{Z}$, alors $\cos(x) \in Y$.

d) En déduire que $Y$ est dense dans $[-1, 1]$.