I Questions préliminaires

Exercice n°1 (Complexes, trigonométrie, géométrie)

1) a) Voir cours.

b) On fait l'encadrement progressivement : $0 \leq a \leq \pi$
$0 \leq b \leq \pi$ donc $-\pi \leq -b \leq 0$.
D'où $-\pi \leq a - b \leq \pi$ et donc $\frac{-\pi}{2} \leq \frac{a-b}{2} \leq \frac{\pi}{2}$.

(c) Par la méthode de l'angle moitié, on a :

Donc $e^{i\frac{a+b}{2}}(2\cos(\frac{a-b}{2}))$ est bien la forme trigonométrique de $e^{ia} + e^{ib}$ où $2\cos(\frac{a-b}{2})$ est son module et $\frac{a+b}{2}$ son argument.

1) Attention, pour $x \in \mathbb{R}$, $e^{ix} = \cos(x) + i\sin(x) \neq \sin(x) + i\cos(x)$. Pour faire apparaître une exponentielle complexe on va donc transformer le cosinus et sinus en sinus et cosinus respectivement :

$$\begin{aligned}
\sin(x) + i\cos(x) &= \cos(\frac{\pi}{2} - x) + i\sin(\frac{\pi}{2} - x)\\
&= e^{\frac{\pi}{2} - x}.
\end{aligned}$$

Un argument de $\sin(x) + i\cos(x)$ est donc $\frac{\pi}{2} - x$.

2)

$$\begin{aligned}
z_1 = \frac{1-2i}{3+i} &= \frac{1-2i}{(3+i)(3-i)}(3-i)\\
&= \frac{1-2i}{10}(3-i)\\
&= \frac{1}{10}[1.3-(-2).(-1)+i(1.(-1)+3.(-2))]\\
&= \frac{1}{10} - i\frac{7}{10}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
z_2 = e^{\frac{43i\pi}{3}} &= \cos(\frac{43\pi}{3}) + i\sin(\frac{43\pi}{3})\\
&= \cos(7.2\pi + \frac{\pi}{3}) + i\sin(7.2\pi + \frac{\pi}{3})\\
&= \cos(\frac{\pi}{3}) + i\sin(\frac{\pi}{3})\\
&= \frac{1}{2} + i\sqrt{\frac{3}{2}}.
\end{aligned}$$

3) Pour le premier il est important de passer à la forme trigonométrique avant d'élever à la puissance (Rappel : la forme algébrique se comporte bien avec les opérations liées à l'addition quand la forme trigonométrique se comporte bien avec les opérations liées à la multiplication et la puissance.)

$$\begin{aligned}
z_3 = \frac{(-2-2i)^7}{i} &= \frac{(2\sqrt{2}(-\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}))^7}{i} \\
&= \frac{(2\sqrt{2})^7}{e^{\frac{i\pi}{2}}}(e^{\frac{5i\pi}{4}})^7 \\
&= 2^{\frac{21}{2}} e^{\frac{35i\pi}{4} - \frac{i\pi}{2}} \\
&= 2^{\frac{21}{2}} e^{\frac{33i\pi}{4}}.
\end{aligned}$$

Pour le second il faut faire attention que le module d'un nombre complexe qui apparaît dans la forme trigonométrique est positif :

$$\begin{aligned}
z_4 = \sin\left(\frac{-\pi}{5}\right) e^{\frac{i\pi}{7}} &= -\sin\left(\frac{\pi}{5}\right) e^{\frac{i\pi}{7}} \\
&= e^{\frac{i\pi}{2}} \sin\left(\frac{\pi}{5}\right) e^{\frac{i\pi}{7}} \\
&= \sin\left(\frac{\pi}{5}\right) e^{\frac{9i\pi}{14}}.
\end{aligned}$$

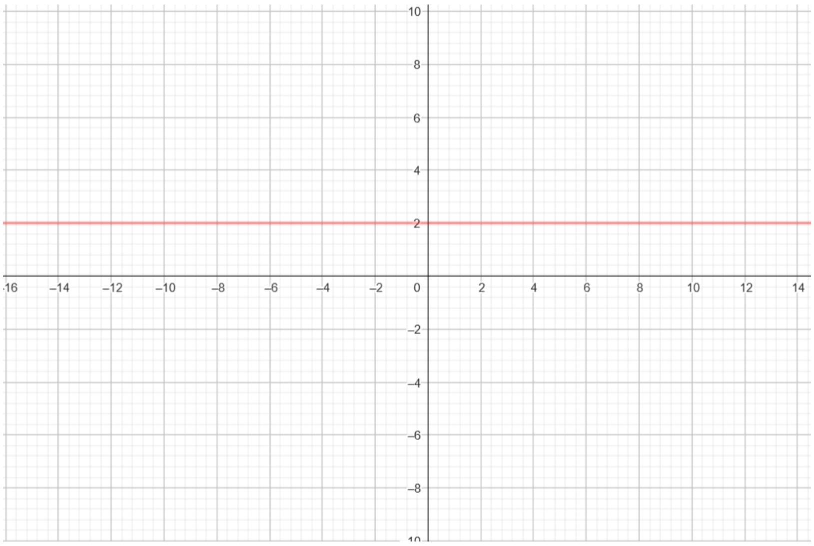
Remarque : Ceci est bien la forme trigonométrique car $\frac{\pi}{5} \in [0, \frac{\pi}{2}]$ donc $\sin(\frac{\pi}{5}) > 0$.

4) On peut raisonner par récurrence : On pose $P(n)$ la proposition $\forall\, (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n, \overline{\left(\sum_{k=1}^n z_k\right)} = \sum_{k=1}^n \overline{z_k}$.
Initialisation :
Au rang $n = 1$, la proposition s'écrit :
" $\forall z \in \mathbb{C}, \overline{z} = \overline{z}$"
ce qui est vrai.
Hérédité :
On suppose la propriété vraie au rang n.
Soit $(z_1, ..., z_{n+1}) \in \mathbb{C}^{n+1}$, on a :

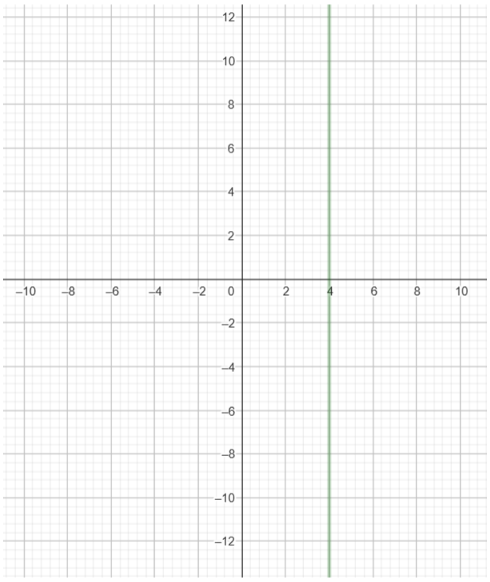
$$\begin{aligned}
\overline{\left(\sum_{k=1}^{n+1} z_k\right)} &= \overline{(\sum_{k=1}^{n} z_k) + z_{n+1}} \\
&\overset{\text{On utilise la propriété pour 2 conjugués}}{=} \overline{(\sum_{k=1}^{n} z_k)} + \overline{z_{n+1}} \\
&\overset{\text{On utilise l'hypothèse de récurrence}}{=} \sum_{k=1}^{n} \overline{z_k} + \overline{z_{n+1}} \\
&= \sum_{k=1}^{n+1} \overline{z_k}.
\end{aligned}$$

la proposition est donc vraie au rang $n+1$.
Par théorème de récurrence, la propriété est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

5) a) Pour $z \in \mathbb{C}$, $\mathrm{Im}(\overline{(z)}) = -\mathrm{Im}(z)$, donc $\{z \in \mathbb{C}, \mathrm{Im}(\bar{z}) = -2\} = \{z \in \mathbb{C}, \mathrm{Im}(z) = 2\}$. On obtient donc le tracé suivant :



b) Pour $z \in \mathbb{C}$, $\mathrm{Re}(\overline{(z)}) = -\mathrm{Re}(z)$, donc $\{z \in \mathbb{C}, \mathrm{Re}(\bar{z}) = 4\} = \{z \in \mathbb{C}, \mathrm{Re}(z) = 4\}$. On obtient donc le tracé suivant :



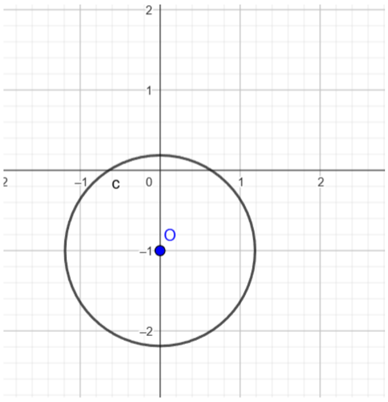
c)

$$\{z \in \mathbb{C}, |\bar{z} - i| = \sqrt{2}\} = \{z \in \mathbb{C}, |\overline{z + i}| = \sqrt{2}\}$$

$$\overset{\text{Le module d'un complexe est égale au module de son conjugué}}{=} \{z \in \mathbb{C}, |z + i| = \sqrt{2}\}$$

$$= \{z \in \mathbb{C}, |z - (0 - i)| = \sqrt{2}\}$$

Il s'agit donc des points complexes sur le cercle de centre d'affixe $-i$ et de rayon $\sqrt{2}$. On obtient donc le tracé suivant :



6) a)

$$\begin{aligned}\sin^4(\theta) &= (\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i})^4 \\ &= \frac{1}{16}[e^{4i\theta}-4e^{2i\theta}+6-4e^{-2i\theta}+e^{-4i\theta}] \\ &= \frac{\cos(4\theta)}{8}-\frac{\cos(2\theta)}{2}+\frac{6}{16}.\end{aligned}$$

b) On utilise la question précédente :

$$8\sin^4(\theta)-\cos(4\theta)=1$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\cos(4\theta)-4\cos(2\theta)+3-\cos(4\theta)=1$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\cos(2\theta)=\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow$$

$$2\theta\in\{\frac{\pi}{3}+2k\pi,k\in\mathbb{Z}\}\cup\{\frac{-\pi}{3}+2k\pi,k\in\mathbb{Z}\}$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\theta\in\{\frac{\pi}{6}+k\pi,k\in\mathbb{Z}\}\cup\{\frac{-\pi}{6}+k\pi,k\in\mathbb{Z}\}$$

7) On la résoud graphiquement sur l'intervalle $[-\pi,\pi]$ puis les solutions s'expriment modulo 2π. Ici on est dans l'intersection de $\sin(x)\le\frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\cos(x)\ge\frac{\sqrt{3}}{2}$. On obtient donc :

8) On veut appliquer la formule du binôme de Newton. Pour ceci, on doit faire apparaître des puissances. Comme dans l'exercice similaire du TD, on peut s'en sortir soit avec les formules d'Euler, soit en utilisant que $\cos(k\theta)=Re(e^{ik\theta})$ et $\sin(k\theta)=Im(e^{ik\theta})$

On obtient donc :

$$\begin{aligned}C_n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}Re(e^{ik\theta}) &= Re\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}e^{ik\theta}\right) \\ &= Re\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(e^{i\theta})^k1^{n-k}\right) \\ &\overset{\text{Formule du binôme}}{=} Re((1+e^{i\theta})^n) \\ &\overset{\text{Formule de l'angle moitié}}{=} Re(2e^{i\frac{\theta}{2}}\cos(\frac{\theta}{2}))^n) \\ &= Re(2^n\cos(\frac{\theta}{2})^n e^{i\frac{n\theta}{2}}) \\ &= 2^n\cos(\frac{\theta}{2})^n\cos(n\frac{\theta}{2})\end{aligned}$$

Par le même calcul, on obtient : $S_n=2^n\cos(\frac{\theta}{2})^n\sin(n\frac{\theta}{2})$

Exercice n°2 (Autour de la bijection réciproque)

1) Cette fonction définie par une fraction est définie partout où le numérateur ne s'annule pas, soit $D_f = \mathbb{R}\backslash\{1\}$.
De plus, comme quotient de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ dont le dénominateur ne s'annule qu'en 1, cette fonction est également dérivable sur $D_{f'} = \mathbb{R}\backslash\{1\}$.

2) On calcule la dérivée de la fonction f afin d'en étudier les variations. Le calcul donne pour $x \in D_{f'}$:
$f^{'}(x) = \frac{3}{(1-x)^2}$.
Cette dérivée est positive sur $D_f = D_{f'}$. La fonction f est donc croissante sur les deux intervalles $]-\infty,1[$ et $]1,+\infty[$.
On détermine les limites de la fonction en $-\infty, 1_-, 1_+$ et $+\infty$.

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -2 \quad \lim_{x\to1,x<1} f(x) = +\infty \quad \lim_{x\to1,x>1} f(x) = -\infty \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = -2$$

Par application du théorème de la bijection (car f est monotone et continue sur les intervalles considérés) f réalise donc une bijection de $]-\infty,1[$ sur $]-2,+\infty[$ et de $]1,+\infty[$ sur $]-\infty,-2[$.
f réalise donc une bijection de D_f sur $I = \mathbb{R}\backslash\{-2\}$.

3) D'après le théorème du cours, la bijection réciproque f^{-1} est dérivable en tout point telle que $f^{'} \circ f^{-1}$ ne s'annule pas. Or $f^{'}$ ne s'annule jamais donc f^{-1} est dérivable sur tout point de son intervalle de définition et on a pour $x \in I$:

$$\begin{aligned}(f^{-1})^{'}(x) &= \frac{1}{f' \circ (f^{-1})} \\ &= \frac{(1-f^{-1}(x))^2}{3}.\end{aligned}$$

4)

a) Soit $y \in I$,

$$\begin{aligned} f(x) = y &\Leftrightarrow \frac{2x+1}{1-x} = y \\ &\Leftrightarrow x \neq 1 \text{ et } 2x+1 = y - xy \\ &\Leftrightarrow x(2+y) = y-1 \qquad \Leftrightarrow x = \frac{y-1}{2+y}. \end{aligned}$$

D'où $g(y) = \frac{y-1}{2+y}$

b) Plusieurs solutions ici, on peut s'en sortir par étude de fonction comme dans la question 2).

c) Soit $x \in D_f$:

$$\begin{aligned} g \circ f(x) &= g(\frac{2x+1}{1-x}) \\ &= \frac{\frac{2x+1}{1-x} - 1}{2 + \frac{2x+1}{1-x}} \\ &= \frac{\frac{3x}{1-x}}{\frac{3}{1-x}} \\ &= x \end{aligned}$$

Soit $y \in I$:

$$\begin{aligned}
f \circ g(y) &= f\left(\frac{y-1}{2+y}\right) \\
&= \frac{2\frac{y-1}{2+y}+1}{1-\frac{y-1}{2+y}} \\
&= \frac{\frac{3y}{2+y}}{\frac{3}{2+y}} \\
&= y.
\end{aligned}$$

II Problèmes

Problème n° 1

1) La fonction g est certainement dérivable sur $\mathbb{R}$, et $g'(x) = e^x - 1$, donc g est décroissante sur $\mathbb{R}^-$et croissante sur $\mathbb{R}^+$, admettant un minimum en 0 . Comme $g(0) = 1-0-1 = 0$, la fonction est positive sur $\mathbb{R}$ tout entier.

2) a) La fonction h est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, et $h'(x) = -e^x + (2-x)e^x = (1-x)e^x$. Cette dérivée est du signe de $1-x$, donc h est croissante sur $]-\infty, -1\ ]$ puis décroissante sur $[1, +\infty\,[$, admettant pour maximum $h(1) = e-1$. De plus, $\lim_{x\to+\infty} h(x) = -\infty$, et comme $h(x) = 2e^x - xe^x - 1$ et $\lim_{x\to-\infty} xe^x = 0$ (croissance comparée), on aura $\lim_{x\to-\infty} h(x) = -1$. On peut donc dresser le tableau de variations suivant pour la fonction h :

x	$-\infty$		1		$+\infty$
h	-1	$\nearrow$	$e-1$	$\searrow$	$-\infty$

b) L'énoncé était manifestement buggué à cet endroit : étant continue et strictement monotone sur chacun des deux intervalles, h est bijective de $]-\infty, 1\ ]$ vers $]-1, e-1\ ]$, puis de $[1, +\infty[$ vers $]-\infty, e-1]$. Le réel $e-1$ étant strictement positif, 0 appartient à chacun des deux intervalles images, et l'équation $h(x) = 0$ admet donc deux solutions, l'une sur l'intervalle $]1, +\infty[$ qu'on notera donc α, et la deuxième sur l'intervalle $]-\infty, -1\ [$ qu'on va noter β. On peut même noter que $h(0) = 1 > 0$, donc $\beta < 0$.

c) La fonction h sera positive dans l'intervalle $[\beta, \alpha]$ et négative sur chacun des deux intervalles $]-\infty, \beta]$ et $[\alpha, +\infty[$.

3) La seule chose qui pourrait empêcher f d'être définie sur $\mathbb{R}$ serait l'annulation de son dénominateur. Or, on a rappelé plus haut que l'inégalit é $e^x \geqslant x+1$ était valable sur $\mathbb{R}$, donc a fortiori $e^x > x$, ce qui prouve que $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$.

4) Pas de forme indét erminée en $-\infty$, le numér at eur tend vers -1 et le dénominat eur vers $-\infty$, donc $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$. De l'autre côté, on va factoriser numérateur et dénominateur par e^x pour obtenir $f(x) = \frac{1-e^{-x}}{1-xe^{-x}}$. Comme $\lim_{x\to+\infty} xe^{-x} = 0$ (croissance comparée classique), on a donc $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 1$. Il y a donc une asymptote horizontale d'équation $y = 1$ en $+\infty$, et l'axe des abscisses est asymptote horizont ale en $-\infty$.

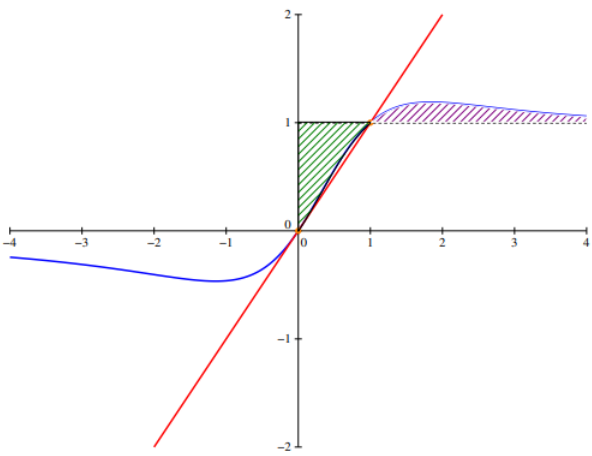
5) La fonction f est dérivable sur son ensemble de définition et $f'(x) = \frac{e^x(e^x-x)-(e^x-1)^2}{(e^x-x)^2} = \frac{e^{2x}-xe^x-e^{2x}+2e^x-1}{(e^x-x)^2} = \frac{h(x)}{(e^x-x)^2}$. Cett e dérivée est donc du signe de $h(x)$, qu'on a étudié plus haut. On ne peut bien entendu pas calculer la valeur du minimum et du maximum de f, on se contentera donc du tableau suivant :

x	$-\infty$		β		α		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
f	0	$\searrow$	$f(\beta)$	$\nearrow$	$f(\alpha)$	$\searrow$	1

6) Pour cela, on calcule classi quement $f(x)-x = \frac{e^x-1}{e^x-x} - x = \frac{e^x-1-xe^x+x^2}{e^x-x} = \frac{e^x(1-x)+x^2-1}{e^x-x} = \frac{(x-1)(x+1-e^x)}{e^x-x}$. Le dénominateur est toujours positif, le facteur $x+1-e^x$ est toujours négatif d'après la premièr e question de l'exercice, donc $f(x)-x$ est du signe opposé à celui de $x-1$. Autrement dit, la courbe $\mathcal{C}$ sera au-dessus de la droit e (D) sur l'int ervalle $]-\infty,1]$, et en-dessous sur l'int ervalle $[1,+\infty[$. Les des courb es se coup ent au point de coordonnées $(1,1)$, mais aussi au point de coordonnées $(0,0)$ puisque le facteur $x+1-e^x$ s'annule (sans changer de signe) en 0.

7) On calcule $f(0) = 0$, puis $f'(0) = h(0) = 2e^0 - 1 = 1$, et on déduit que la tangente en question a pour équation $y = x$. Autrement dit, il s'agit tout simplement de la droite (D).

8) On est bien sûr obligés de placer aléatoirement le maximum et le minimum, par contre, on fait attention à bien respecter les asymptotes horizont ales et la position relative par rapport à la droite (D) (les points d'intersection sont indiqués en orange ci-dessous) :



9) a) Par le cours, la fonction $\ln(u)$ est définie car u est strictement positive et sa dérivée est $\frac{u'}{u}$.

b) Avec la question précédente (+ cours sur les primitives), on reconnaît ici la dérivée de $F : x \mapsto \ln(e^x - x)$.

c) On en déduit que $I = \int_0^1 f(t)dt = [\ln(e^x-x)]_0^1 = \ln(e-1) - \ln(1) = \ln(e-1)$.

10) Calculons donc : $u_n = [\ln(e^x-x)-x]_0^n = \ln(e^n-n)-n$ puisque notre primitive s'annule en 0 . Pour déterminer la limite, écrivons $\ln(e^n-n) = \ln(e^n(1-ne^{-n})) = n + \ln(1-ne^{-n})$. On en déduit que $u_n = \ln(1-ne^{-n})$. Par croissance comparée, $\lim_{n\to+\infty} ne^{-n} = 0$, dont on déduit que $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$.

11) Le nombre $u_n - u_1$ est égal à $\int_1^n (f(t)-1)dt$, ce qui représente l'aire comprise entre la courbe $\mathcal{C}$ et la droite horizontale d'équation $y=1$, entre les droites verticales d'équation $x=1$ et $x=n$ (aire hachurée en violet sur le graphique précédent, jusqu'à l'abscisse $x=4$ où s'arrêt e la représentation). D'après la question précédent, $\lim_{n\to+\infty} u_n - u_1 = -u_1$, ce qui prouve que l'aire hachurée en violet, si on fait tendre la limite supérieure

vers $+\infty$, va être égale à l'aire hachurée en vert située entre $\mathcal{C}$, la droite $y = 1$ et $x = 1$ et l'axe des ordonnées.

Problème n° 2

1) a) Soit $z \in D$, notons $a = Re(z)$ et $b = Im(z)$ de sorte que $z = a + ib$.
On a alors que :

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{a - ib - i} \\ &= \frac{1}{a - i(b+1)} \\ &= \frac{a + i(b+1)}{a^2 + (b+1)^2} \\ &= \frac{a}{a^2 + (b+1)^2} + i\frac{b+1}{a^2 + (b+1)^2} \end{aligned}$$

b) D'après la question a), pour $z \in D$, $f(z) \in \mathbb{R}$ si et seulement si $b + 1 = 0$ où $b = Im(z)$ soit si $Im(z) = -1$. Cela réprésente l'ensemble des points du plans sur la droite $y = -1$.

c) On a :

$$\begin{aligned} f(z) \in \mathbb{U} &\Leftrightarrow \frac{1}{\bar{z} - i} \in \mathbb{U} \\ &\Leftrightarrow |\frac{1}{\bar{z} - i}| = 1 \\ &\Leftrightarrow |\bar{z} - i| = 1 \\ &\Leftrightarrow |z + i| = 1 \end{aligned}$$

car le module du conjugué est le conjugué du module

D'après le cours on sait que ce sont les points sur le cerle de centre $(0, -1)$ (d'affixe $-i$) et de rayon 1.

2)

a) Soit $\theta \in]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$

$$\begin{aligned} 1 + \tan^2(\theta) &= 1 + \frac{\sin^2(\theta)}{\cos^2(\theta)} \\ &= \frac{\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta)}{\cos^2(\theta)} \\ &= \frac{1}{\cos^2(\theta)}. \end{aligned}$$

b) En reprenant la question 1a) et sachant que $\tan(\theta)$ est un réel donc de partie imaginaire nulle, on a que :

$$f(\tan(\theta)) = \frac{\tan(\theta)}{\tan(\theta)^2 + 1^2} + i\frac{1}{\tan(\theta)^2 + 1^2}$$

En utilisant la question précédente, on a alors :

c) Pour montrer ceci, il suffit de montrer que $|f(\tan(\theta)) - \frac{i}{2}| = \frac{1}{2}$.
Or on a grâce à la question précédente :

$$\begin{aligned}|f(\tan(\theta)) - \frac{i}{2}| &= |\frac{i}{2}e^{-i\theta}| \\ &= |\frac{i}{2}||e^{-i\theta}| \\ &= \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

3) a) i)

$$\begin{aligned}f(z) = -\bar{z} + \sqrt{3} &\Leftrightarrow \frac{1}{\bar{z} - i} = -\bar{z} + \sqrt{3} \\ &\Leftrightarrow 1 = (\bar{z} - i)(-\bar{z} + \sqrt{3}) \\ &\Leftrightarrow \bar{z}^2 - (\sqrt{3} + i)\bar{z} + (\sqrt{3}i - 1) = 0\end{aligned}$$

C'est une équation complexe du second degré en $\bar{z}$.

ii) Le discriminant Δ de cet équation vaut $(\sqrt{3}+i)^2 - 4(\sqrt{3}i - 1) = 6 - 2\sqrt{3}i = 4\sqrt{3}(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}) = 4\sqrt{3}e^{-\frac{i\pi}{6}}$.

iii) Les racines de Δ sont $\pm\delta$ où $\delta = \sqrt{4\sqrt{3}}e^{-\frac{i\pi}{12}}$ d'après le théorème rappellé en introduction, les solutions (pour $\bar{z}$) sont donc de la forme :

$$z_1 = \frac{\sqrt{3} + i + \delta}{2}$$

et

$$z_2 = \frac{\sqrt{3} + i - \delta}{2}$$

b)

$$\begin{aligned}f(z) = z &\Leftrightarrow z(\bar{z} - i) = 1 \\ &\Leftrightarrow a^2 + b^2 - ia + b = 1 \\ &\Leftrightarrow a = 0 \text{ et } a^2 + b^2 + b = 1 \\ &\Leftrightarrow a = 0 \text{ et } b^2 + b - 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow a = 0 \text{ et } b = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}\end{aligned}$$

où a et b sont respectivement la partie réelle et imaginaire de z.

Problème n° 3

Partie 1 : Propriétés géométriques des éléments de $\mathbf{U}_{11}$

1) Soit $k \in [\![0, 10]\!]$. D'après la formule de Moivre :

$$\omega^k = \cos\left(\frac{2k\pi}{11}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{2k\pi}{11}\right)$$

D'après la relation fondamentale de la trigonométrie, on a : $\left|\omega^k\right|^2 = 1$, d'où $\left|\omega^k\right| = 1$. Ce qui signifie que ω^k appartient au cercle unité.
Conclusion : $\forall k \in [\![0, 10]\!], \quad \omega^k \in \mathbb{U}$

2) On a : $\omega^{11} = \left(e^{2i\pi/11}\right)^{11} = e^{2i\pi} = 1.$ Conclusion. $\omega^{11} = 1$

3) Soit $k \in [\![0,10]\!]$. On a : $\omega^{11-k} \times \omega^k = \omega^{11}$ On en déduit avec la question précédente que : $\omega^{11-k} \times \omega^k = 1$. Par suite : $\omega^{11-k} = \frac{1}{\omega^k}$. Or : $\frac{1}{\omega^k} = \overline{\omega^k}$ (puisque selon le cours on $\bar{z} = \frac{1}{z}$ pour tout $z \in \mathbb{U}$). Conclusion. $\forall k \in [\![1,10]\!], \quad \overline{\omega^k} = \omega^{11-k}$

4) Soit $k \in [\![0,9]\!]$. On a :

$$\left|\omega^{k+1} - \omega^k\right| = \left|e^{2i(k+1)\pi/11} - e^{2ik\pi/11}\right| = \underbrace{\left|e^{2ik\pi/11}\right|}_{=1} \times \left|e^{2i\pi/11} - 1\right| = \left|e^{j\pi/11}\left(e^{i\pi/11} - e^{-i\pi/11}\right)\right|$$

$$= \underbrace{\left|e^{i\pi/11}\right|}_{=1} \times \left|-2i\sin\left(\frac{\pi}{11}\right)\right| = \underbrace{|-2i|}_{=2} \times \left|\sin\left(\frac{\pi}{11}\right)\right| = 2\sin\left(\frac{\pi}{11}\right)$$

la dernière égalité provenant de la positivité de $\sin\left(\frac{\pi}{11}\right)$ (car $\frac{\pi}{11} \in [0,\pi]$. Conclusion. $\forall k \in [\![0,9]\!], \quad \left|\omega^{k+1} - \omega^k\right| = 2\sin\left(\frac{\pi}{11}\right)$

5) La somme $\sum_{k=0}^{10} \omega^k$ est géométrique de raison ω, avec $\omega \neq 1$. Par suite :

$$\sum_{k=0}^{10} \omega^k = \frac{1 - \overbrace{\omega^{11}}^{=1}}{1 - \omega} = 0$$

Conclusion. $\sum_{k=0}^{10} \omega^k = 0$

Partie 2 : Propriétés algébriques des éléments de U_{11}

6) D'après la question 3 , on a :

$$\bar{\omega} = \omega^{10}; \overline{\omega^3} = \omega^8; \overline{\omega^4} = \omega^7; \overline{\omega^5} = \omega^6; \overline{\omega^9} = \omega^2$$

On en déduit que :

$$\bar{A} = \overline{\omega + \omega^3 + \omega^4 + \omega^5 + \omega^9} = \bar{\omega} + \overline{\omega^3} + \overline{\omega^4} + \overline{\omega^5} + \overline{\omega^9} = \omega^{10} + \omega^8 + \omega^7 + \omega^6 + \omega^2 = B$$

Conclusion. $B = \bar{A}$

7) On a :

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Im}(A) = \mathrm{Im}\left(\omega + \omega^3 + \omega^4 + \omega^5 + \omega^9\right)\\
&\Longleftrightarrow \mathrm{Im}(A) = \mathrm{Im}(\omega) + \mathrm{Im}\left(\omega^3\right) + \mathrm{Im}\left(\omega^4\right) + \mathrm{Im}\left(\omega^5\right) + \mathrm{Im}\left(\omega^9\right)\\
&\Longleftrightarrow \mathrm{Im}(A) = \mathrm{Im}\left(e^{2i\pi 11}\right) + \mathrm{Im}\left(e^{6i\pi 11}\right) + \mathrm{Im}\left(e^{8i\pi 11}\right) + \mathrm{Im}\left(e^{10i\pi 11}\right) + \mathrm{Im}\left(e^{18i\pi 11}\right)\\
&\Longleftrightarrow \mathrm{Im}(A) = \sin\left(\frac{2\pi}{11}\right) + \sin\left(\frac{6\pi}{11}\right) + \sin\left(\frac{8\pi}{11}\right) + \sin\left(\frac{10\pi}{11}\right) + \sin\left(\frac{18\pi}{11}\right)
\end{aligned}$$

Les 4 premiers sinus sont strictement positifs, puisque les réels $\frac{2\pi}{11}, \frac{6\pi}{11}, \frac{8\pi}{11}$ et $\frac{10\pi}{11}$ sont dans $]0,\pi[$. Le dernier est strictement négatif, puisque $\frac{18\pi}{11}$ est dans $]\pi, 2\pi[$. Conclusion. $\mathrm{Im}(A) = \underbrace{\sin\left(\frac{2\pi}{11}\right)}_{>0} + \underbrace{\sin\left(\frac{6\pi}{11}\right)}_{>0} + \underbrace{\sin\left(\frac{8\pi}{11}\right)}_{>0} + \underbrace{\sin\left(\frac{10\pi}{11}\right)}_{>0} + \underbrace{\sin\left(\frac{18\pi}{11}\right)}_{<0}$

8) On a : $\sin\left(\frac{18\pi}{11}\right)=-\sin\left(-\frac{18\pi}{11}\right)=-\sin\left(2\pi-\frac{18\pi}{11}\right)=-\sin\left(\frac{4\pi}{11}\right)$

$$=-\sin\left(\pi-\frac{4\pi}{11}\right)=-\sin\left(\frac{7\pi}{11}\right)$$

Observons que :

$$\frac{\pi}{2}<\frac{6\pi}{11}<\frac{7\pi}{11}<\pi$$

La fonction sinus étant strictement décroissante sur $]\pi/2,\pi[$, on en déduit que :

$$\sin\left(\frac{6\pi}{11}\right)>\sin\left(\frac{7\pi}{11}\right) \text{ d'où } \sin\left(\frac{6\pi}{11}\right)-\sin\left(\frac{7\pi}{11}\right)>0$$

Par suite : $\sin\left(\frac{6\pi}{11}\right)+\sin\left(\frac{18\pi}{11}\right)>0$. On en déduit avec la question précédente, que :

$$\sin\left(\frac{2\pi}{11}\right)+\sin\left(\frac{6\pi}{11}\right)+\sin\left(\frac{8\pi}{11}\right)+\sin\left(\frac{10\pi}{11}\right)+\sin\left(\frac{18\pi}{11}\right)>0$$

Conclusion. $\mathrm{Im}(A)>0$

9) On a : $\sin\left(\frac{18\pi}{11}\right)=-\sin\left(-\frac{18\pi}{11}\right)=-\sin\left(2\pi-\frac{18\pi}{11}\right)=-\sin\left(\frac{4\pi}{11}\right)$

$$=-\sin\left(\pi-\frac{4\pi}{11}\right)=-\sin\left(\frac{7\pi}{11}\right)$$

Observons que :

$$\frac{\pi}{2}<\frac{6\pi}{11}<\frac{7\pi}{11}<\pi$$

La fonction sinus étant strictement décroissante sur $]\pi/2,\pi[$, on en déduit que :

$$\sin\left(\frac{6\pi}{11}\right)>\sin\left(\frac{7\pi}{11}\right) \text{ d'où } \sin\left(\frac{6\pi}{11}\right)-\sin\left(\frac{7\pi}{11}\right)>0$$

Par suite : $\sin\left(\frac{6\pi}{11}\right)+\sin\left(\frac{18\pi}{11}\right)>0$. On en déduit avec la question précédente, que :

$$\sin\left(\frac{2\pi}{11}\right)+\sin\left(\frac{6\pi}{11}\right)+\sin\left(\frac{8\pi}{11}\right)+\sin\left(\frac{10\pi}{11}\right)+\sin\left(\frac{18\pi}{11}\right)>0$$

Conclusion. $\mathrm{Im}(A)>0$

10) D'après la question précédente : $\begin{cases} A+B=-1 \\ A\times B=3 \end{cases}$ D'après le cours, A et B sont les racines de l'équation : $X^2+X+3=0$. Le discriminant de cette équation est $\Delta=-11$. Elle possède donc exactement deux racines : $\frac{-1\pm i\sqrt{11}}{2}$. On en déduit donc que :

$$\{A,B\}=\left\{\frac{-1+i\sqrt{11}}{2},\frac{-1-i\sqrt{11}}{2}\right\}$$

Puisque la partie imaginaire de A est strictement positive (question 8), on peut conclure. Conclusion. $A=\frac{-1+i\sqrt{11}}{2}$ et $B=\frac{-1-i\sqrt{11}}{2}$

11) La somme $\sum_{k=1}^{10}\left(-\omega^3\right)^k$ est géométrique de raison $\left(-\omega^3\right)\neq 1$. On a donc :

$$\sum_{k=1}^{10}\left(-\omega^3\right)^k=\left(-\omega^3\right)\frac{1-\left(-\omega^3\right)^{10}}{1+\omega^3}=\left(-\omega^3\right)\frac{1-\omega^{30}}{1+\omega^3}=\frac{\omega^{33}-\omega^3}{1+\omega^3}$$

Or : $\omega^{33}=\left(\omega^{11}\right)^3=1^3=1$ (question 2). Conclusion. $\sum_{k=1}^{10}\left(-\omega^3\right)^k=\frac{1-\omega^3}{1+\omega^3}$

12) D'après la question précédente : $\sum_{k=1}^{10}\left(-\omega^3\right)^k=\frac{1-\omega^3}{1+\omega^3}$ Or :

$$\frac{1-\omega^3}{1+\omega^3}=\frac{1-\mathrm{e}^{6\mathrm{i}\pi/11}}{1+\mathrm{e}^{6\mathrm{i}\pi/11}}=\frac{\mathrm{e}^{3\mathrm{i}\pi/11}\left(\mathrm{e}^{-3\mathrm{i}\pi/11}-\mathrm{e}^{3\mathrm{i}\pi/11}\right)}{\mathrm{e}^{3\mathrm{i}\pi/11}\left(\mathrm{e}^{-3\mathrm{i}\pi/11}+\mathrm{e}^{3\mathrm{i}\pi/11}\right)}=\frac{-2\mathrm{i}\sin\left(\frac{3\pi}{11}\right)}{2\cos\left(\frac{3\pi}{11}\right)}=-\mathrm{i}\tan\left(\frac{3\pi}{11}\right)$$

Conclusion. $\sum_{k=1}^{10}\left(-\omega^3\right)^k=-\mathrm{i}\tan\left(\frac{3\pi}{11}\right)$

13) D'une part on a :

$$\sum_{k=1}^{10}\left(-\omega^3\right)^k=-\omega^3+\omega^6-\omega^9+\omega^{12}-\omega^{15}+\omega^{18}-\omega^{21}+\omega^{24}-\omega^{27}+\omega^{30}$$
$$\Longleftrightarrow\sum_{k=1}^{10}\left(-\omega^3\right)^k=-\omega^3+\omega^6-\omega^9+\omega-\omega^4+\omega^7-\omega^{10}+\omega^2-\omega^5+\omega^8$$

D'autre part on a :

$$(B-A)+2\left(\omega-\omega^{10}\right)=\omega^2+\omega^6+\omega^7+\omega^8+\omega^{10}-\omega-\omega^3-\omega^4-\omega^5-\omega^9+2\omega-2\omega^{10}$$
$$\Longleftrightarrow(B-A)+2\left(\omega-\omega^{10}\right)=-\omega^3+\omega^6-\omega^9+\omega-\omega^4+\omega^7-\omega^{10}+\omega^2-\omega^5+\omega^8$$

Conclusion. D'après les 2 équations précédentes,

$$\sum_{k=1}^{10}\left(-\omega^3\right)^k=(B-A)+2\left(\omega-\omega^{10}\right)$$

14) D'après la question précédente : $\sum_{k=1}^{10}\left(-\omega^3\right)^k=(B-A)+2\left(\omega-\omega^{10}\right)$ Puisque A et B sont conjugués (question 6), on a : $B-A=B-\bar{B}=2\mathrm{i}\mathrm{Im}(B)$ Ainsi : $\sum_{k=1}^{10}\left(-\omega^3\right)^k=2\,\mathrm{i}\mathrm{Im}(B)+2\left(\omega-\omega^{10}\right)$ De plus, selon la question 10 , on a : $B=\frac{-1-\mathrm{i}\sqrt{11}}{2}$. D'où : $2\,\mathrm{i}\mathrm{Im}(B)=-\mathrm{i}\sqrt{11}$ Enfin, on a : $\omega^{10}=\bar{\omega}$ (question 3). D'où : $\omega-\omega^{10}=2\mathrm{i}\,\mathrm{Im}(\omega)=2\mathrm{i}\sin\left(\frac{2\pi}{11}\right)$ On déduit que :

$$\sum_{k=1}^{10}\left(-\omega^3\right)^k=-\mathrm{i}\sqrt{11}+4\mathrm{i}\sin\left(\frac{2\pi}{11}\right)$$

On en déduit, avec la question 12 que :

$$-\mathrm{i}\sqrt{11}+4\mathrm{i}\sin\left(\frac{2\pi}{11}\right)=-\mathrm{i}\tan\left(\frac{3\pi}{11}\right)$$

Conclusion. $\tan\left(\frac{3\pi}{11}\right)+4\sin\left(\frac{2\pi}{11}\right)=\sqrt{11}$