Chapitre 13 : Systèmes linéaires et matrices.

C) L'anneau des matrices carrées

- Inversibilité des matrices d'opération élémentaire
- Opérations élémentaires préservent l'inversibilité
- A inversible $\Longleftrightarrow AX = Y$ a une unique solution $\forall X \in M_{n,1}(\mathbb{K})$.
- Si $A_1X = A_2X \forall X, A_1 = A_2$.
- Calcul de l'inverse d'une matrice par résolution de $AX = Y$.
- Lemme sur l'inversibilité de matrice (vers l'inversibilité par le pivot de Gauss).
- Inersion matrice carrée par méthode du pivot de gauss
- Une matrice triangulaire est inversible si et seulement si ses coefficients diagonaux sont non nuls
- L'inverse d'une mmatrice triangulaire supérieure(resp inférieure) inversible est triangulaire supérieure (resp inférieure)

Chapitre 14 : Limites et continuité

A) Limite et continuité ponctuelle

- Définition notion de voisinage
- Lien avec la notion "à partir d'un certain rang" pour les suites.
- Définition limites finies et infinies en un point adhérent à l'intervalle de définition de la fonction.
- Unicité de la limite
- Une fonction qui admet une limite en un point de son intervalle de définition est continue en ce point (déf continuité)
- Toute fonction admettant une limite finie en un point est bornée au voisinage de ce point.
- Théorème de composition des limites / théorème de caractérisation séquentielle de la limite
- Caractère local de la limite
- Notion de limite à gauche et limite à droite d'un point
- Notion de continuité à gauche et de continuité à droite
- Notion de limite épointée/ prolongement par continuité en un point
- Théorème d'opérations sur les limites/continuité
- Théorèmes de passages à la limité
- Théorèmes d'encadrement,de majoration,de minoration
- Théorème de limite monotone

Questions de cours :

POUR TOUS LES ETUDIANTS : Vous devez impérativement être capable de redonner la définition de limite finie ou infinie en un point fini ou infini et la définition de continuité en un point à l'aide de quantificateurs.

- Calcul de l'inverse d'une matrice au choix du colleur par résolution du système $AX = Y$(Y quelconque) ou par méthode d'opérations élémentaires.
- Montrer que l'inverse d'une matrice triangulaire supérieure (resp. inférieure) est également triangulaire supérieure (resp. triangulaire inférieure.)
- Prouver le théorème de cractérisation séquentielle de la limite (l'équivalence entière). On ne montrera que le cas $a \in \mathbb{R}$ et $l \in \mathbb{R}$.

Théorème de caractérisation séquentielle de la limite

Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction et $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) la fonction f a pour limite ℓ en a ;

(ii) pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans I de limite a, la suite $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ pour limite ℓ.

- **1)** Prouver le théorème de passage à la limite pour les fonctions à l'aide de suites (on se placera dans le cas où $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ est telle que $f \geq b$ au voisinage de $a \in I$

2) À l'aide du théorème de caractérisation séquentielle de la limite, montrer :

Thm

Soit $(f,g) \in \mathcal{F}(I,\mathbb{R})^2$, et soit $a \in \overline{\mathbb{R}}$ adhérent à I. On suppose que f et g admettent respectivement $\ell \in R$ et $\ell' \in \mathbb{R}$ pour limite en a suivant I.
Alors $f.g$ admet $\ell.\ell'$ pour limite en a suivant I :

$$\lim_{x\to a} f(x)\cdot g(x) = \lim_{x\to a} f(x) \cdot \lim_{x\to a} g(x)$$