Chapitre 14 : Limites et continuité

B) Continuité sur un intervalle

- Définition
- Opérations sur les fonctions continues
- Fonctions lipschitzienne (toute fonction lipschitzienne est continue).
- Théorème des valeurs intermédiares (version segment et intervalle)
- Théorème de la bijection
- Théorème des bornes atteintes (version classique et version segment)
- Fonctions continues et lien entre monotonie et injectivité (Vu Lundi)

C) Fonctions à valeurs complexes (vu Lundi)

- Adaptation des divers théorèmes aux fonctions à valeurs complexes.

C) Fonctions à valeurs complexes

- Adaptation des divers théorèmes aux fonctions à valeurs complexes. D) Applications aux suites définies par récurrences
  - Etude des suites définies par $u_0 \in I, u_{n+1} = f(u_n) \forall n \in \mathbb{N}$ avec $f : I \to I$.
  - Etude de la monotonie : le cas f croissant
  - Le cas f décroissant
  - Le cas général.
  - Théorème de convergence vers un point fixe si f continue.

Chapitre 15 : Dérivabilité

A) Dérivabilité en un pointDéfinition Dérivable implique continue Une fonction est dérivable si et seulement si elle admet un développement limité à l'ordre 1. Tangente en un point où la fonction est dérivable Opération sur les fonctions dérivables (somme, produit,...) Dérivabilité à gauche, à droite.

B) Dérivabilité sur un intervalle

- Définition
- Opérations sur les fonctions dérivables
- Dérivabilité de la bijection réciproque.
- Opération sur les fonctions dérivables (somme, produit,...)

C) extremas, théorème de Rolle, TAF et IAF

- Définitions extremas locaux et globaux
- Point critique.
- Un extrema est un point critique.
- Théorème de Rolle
- Théorème des acroissemens finis
- Inégalité des acroissements finis

D) Applications

- Lien entre monotonie et signe de la dérivée sur un intervalle.
- Théorème de limite de la dérivée.
- Etude des suites récurrentes $u_{n+1} = f(u_n)$ pour $f \in D(I, I)$ telle que $|f^{'}| \leq k < 1$. (terminé Lundi)

Montrer le théorème des valeurs intermédiaire :

(Théorème des valeurs intermédiaires).

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a \leqslant b$, et soit $f \in \mathcal{C}([a; b], \mathbb{R})$. Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ compris entre $f(a)$ et $f(b)$ (i.e. $\lambda \in [f(a); f(b)]$ si $f(a) \leqslant f(b)$ et $\lambda \in [f(b); f(a)]$ si $f(a) > f(b)$), il existe $c \in [a; b]$ tel que $f(c) = \lambda$.

Montrer que toute fonction continue sur un segment est continue et atteint ses bornes.

Questions de cours :

- Montrer le théorème des valeurs intermédiaire :

(Théorème des valeurs intermédiaires).

Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a \leqslant b$, et soit $f \in \mathcal{C}([a;b],\mathbb{R})$. Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ compris entre $f(a)$ et $f(b)$ (i.e. $\lambda \in [f(a);f(b)]$ si $f(a) \leqslant f(b)$ et $\lambda \in [f(b);f(a)]$ si $f(a) > f(b)$), il existe $c \in [a;b]$ tel que $f(c) = \lambda$.

- Montrer que toute fonction continue sur un segment est continue et atteint ses bornes.
- Preuve du théorème de Rolle et du théorème des acroissements finis.
- Preuve du théorème de limite de la dérivée puis étude pour $n \in \mathbb{N}^*$ de la continuité en 0, dérivabilité en 0 et continuité de la dérivée en 0 pour les fonctions $f_n : x \mapsto x^n \sin(\frac{1}{x})$.
- Etude d'une suite récurrente au choix du colleur de la forme $u_{n+1} = f(u_n)$ pour f continue. On cherchera un intervalle stable par f, la monotonie de la suite (u_n) et on en déduira sa convergence éventuelle.
- Pour $f : I \to \mathbb{R}$ dérivable sur I on prouvera les 3 propriétés suivantes :
  a) $f^{'} \geq 0 \Longleftrightarrow f$ croissante sur I.
  b) Si : $\forall x \in I, f'(x) \geqslant 0$, et que f' s'annule au plus un nombre fini de fois sur I, alors f est strictement croissante sur I.
  c) Si f est strictement croissante sur I, alors : $\forall x \in I, f'(x) \geqslant 0$ et pour tout sous-intervalle $J \subset I$, il existe $x \in J$ tel que $f'(x) > 0$.