I Questions préliminaires

Rappel n°1 :

Pour $n \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N}, k \leq n$, on note $\binom{n}{k}$ le coefficient binomial "k parmi n" qui est un **entier**.

Exercice n°1 : Nombres complexes

1) Première méthode :

$$Z = \frac{\sqrt{3}}{8} - \frac{i}{8} = \frac{1}{4}\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}$$

$$= \frac{1}{4}(e^{\frac{-i\pi}{6}})$$

Les deux racines complexes de Z sont donc $\pm\frac{1}{2}(e^{\frac{-i\pi}{12}})$.
Deuxième méthode :
On cherche à résoudre l'équation $z^2 = Z$ avec $z = X + iY \in \mathbb{C}$.
Les deux équations $|z|^2 = |Z|$ et $z^2 = Z$ donne le système suivant en séparant partie réelle et partie imaginaire :
$\begin{cases} X^2 + Y^2 = \frac{1}{4} \\ X^2 - Y^2 = \frac{\sqrt{3}}{8} \\ 2XY = -\frac{1}{8} \end{cases}$
La résolution de ce système donne deux solutions (La troisième équation nous donne en particulier que le signe de la partie réelle et la partie imaginaire doivent être opposés) :

$$z_1 = \sqrt{\frac{\frac{1}{4} + \frac{\sqrt{3}}{8}}{2}} - i\sqrt{\frac{\frac{1}{4} - \frac{\sqrt{3}}{8}}{2}} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{\sqrt{3}}{16}} - i\sqrt{\frac{1}{8} - \frac{\sqrt{3}}{16}}$$

$$z_2 = -\sqrt{\frac{\frac{1}{4} + \frac{\sqrt{3}}{8}}{2}} + i\sqrt{\frac{\frac{1}{4} - \frac{\sqrt{3}}{8}}{2}} = -\sqrt{\frac{1}{4} + \frac{\sqrt{3}}{16}} + i\sqrt{\frac{1}{8} - \frac{\sqrt{3}}{16}}$$

.
Avec le signe de la partie réelle et imaginaire, on peut ensuite identifier que $z_1 = \frac{1}{2}(e^{\frac{-i\pi}{12}})$ et $z_2 = -\frac{1}{2}(e^{\frac{-i\pi}{12}})$.
D'où $z_1 = \frac{1}{2}(\cos(\frac{-\pi}{12}) + i\sin(\frac{-\pi}{12})) = \frac{1}{2}(\cos(\frac{\pi}{12}) - i\sin(\frac{-\pi}{12}))$
Ainsi $\boxed{\tan(\frac{\pi}{12}) = -\frac{Im(z_1)}{Re(z_1)} = \frac{\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{\sqrt{3}}{16}}}{\sqrt{\frac{1}{8}-\frac{\sqrt{3}}{16}}}.}$

2) On commence par calculer le discriminant de ce polynôme du second degré :

$$\Delta = (5-i)^2 - 4.2.6 = -24 + 10i$$

Par méthode algébrique on détermine les deux racines de ce discriminant :
$\delta = \pm 1 + 5i$
Les solutions de cette équation sont alors :
$\boxed{z_1 = \frac{-(5-i)-(1+5i)}{2.6} = \frac{1}{3} - \frac{i}{2}}$
$\boxed{z_2 = \frac{-(5-i)+(1+5i)}{2.6} = \frac{1}{2} + \frac{i}{3}.}$

3) Soit $z \in \mathbb{C}$. Faisons la remarque que $(z+1)^n = (z-1)^n$ n'est pas possible si $z = \pm 1$. Dans la suite on prendra donc $z \in \mathbb{C}\backslash\{\pm 1\}$.

On a :

$$(z+1)^n = (z-1)^n \Leftrightarrow \left(\frac{z+1}{z-1}\right)^n = 1$$

$$\overset{\text{théorème sur les racines n-ièmes de l'unité}}{\Leftrightarrow} \frac{z+1}{z-1} \in \{e^{\frac{2ik\pi}{n}}, k \in [\![0, n-1]\!]\}$$

$$\Leftrightarrow z+1 = (z-1)e^{\frac{2ik\pi}{n}}, k \in [\![0, n-1]\!]$$

$$\overset{\text{On enlève la valeur } k=0 \text{ qui n'est pas possible}}{\Leftrightarrow} z = \frac{-1-e^{\frac{2ik\pi}{n}}}{1-e^{\frac{2ik\pi}{n}}}, k \in [\![1, n-1]\!]$$

$$\overset{\text{Formule de l'angle moitié}}{\Leftrightarrow} z = \frac{-2\cos(\frac{k\pi}{n})}{-2i\sin(\frac{k\pi}{n})}, k \in [\![1, n-1]\!]$$

$$\Leftrightarrow z = \frac{-i}{\tan(\frac{k\pi}{n})}, k \in [\![1, n-1]\!]$$

Donc $\boxed{(z+1)^n = (z-1)^n \Leftrightarrow z = \frac{-i}{\tan(\frac{k\pi}{n})}, k \in [\![1, n-1]\!]}$

4) $a = (-\sqrt{3}+i) \neq 1$ donc s n'est pas une translation.

$a \notin \mathbb{R}$ donc s n'est pas une homotéthie.

Et $|a| \neq 1$ donc s n'est pas une rotation.

s est donc la composée d'une rotation et d'une homotéthie.

Pour déterminer son centre, on résoud $s(z_\Omega) = z_\Omega$ ce qui nous donne $z_\Omega = \frac{i}{(1-\sqrt{3})-i} = -\frac{1}{1+(1-\sqrt{3})^2} + \frac{(1-\sqrt{3})i}{1+(1-\sqrt{3})^2}$.

De plus $a = -\sqrt{3}+i = 2e^{\frac{5i\pi}{6}}$.

Donc : $\boxed{\text{$s$ est la composition de l'homotéthie de rapport 2 et de centre Ω d'affixe z_Ω et de la rotation d'angle $\frac{5\pi}{6}$ et de centre Ω.}}$

5) L'expressions de l'homotéthie de rapport λ et de centre d'affixe z_Ω est $s : z \mapsto \lambda(z - z_\Omega) + z_\Omega$.

Ici la similitude directe est donc $s : z \mapsto 7(z - (-3i)) + (-3i)$, soit :

$\boxed{s : z \mapsto 7z + 18i.}$

6) Par propriétés sur les similitudes directes, F a une expression complexe de la forme $z \mapsto az + b$, avec $a \in \mathbb{R}^*$ (si $a = 1, F$ est une translation, sinon c'est une homothétie de rapport a). De même, G a une expression complexe de la forme $z \mapsto a'z + b'$, avec $a' \in \mathbb{R}^*$.

La composée $F \circ G$ a pour expression complexe $z \mapsto a(a'z + b') + b = aa'z + (ab' + b)$. Comme $aa' \in \mathbb{R}^*$, $F \circ G$ est une homothétie ou une translation.

En particulier, si F est une homothétie de rapport a et G un homothétie de rapport a', alors $F \circ G$ est une homothétie de rapport aa' si $aa' \neq 1$ et une translation sinon.

<u>Exercice n°2 : Généralités sur les fonctions usuelles</u>

1) cf cours.

2) $\frac{2\pi}{7} \in [0, 2\pi]$ donc d'après la question précédente (et le cours) :

$$\boxed{\arccos\left(\cos\frac{2\pi}{7}\right) = \frac{2\pi}{7}}.$$

$\cos\frac{-2\pi}{7} = \cos\frac{2\pi}{7}$ donc :

$\boxed{\arccos\left(\cos\frac{-2\pi}{7}\right)=\frac{2\pi}{7}}$.

$$\begin{aligned}\arccos\left(\sin\frac{17\pi}{5}\right)&=\arccos(\sin(3\pi+\frac{2\pi}{5}))\\&=\arccos(-\sin(\frac{2\pi}{5}))\\&\overset{\cos(\frac{\pi}{2}-x)=\sin(x)}{=}\arccos(-\cos(\frac{\pi}{10}))\\&\overset{\cos(\pi-x)=-\cos(x)}{=}\arccos(\cos(\frac{7\pi}{10}))\\&\overset{\frac{9\pi}{10}\in[0,\pi]}{=}\frac{9\pi}{10}\end{aligned}$$

Donc :

$\boxed{\arccos\left(\sin\frac{17\pi}{5}\right)=\frac{9\pi}{10}}$.

3) cf cours.

4) Soit $x\in[-1,1]$. Puisque $\operatorname{Arcsin} x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$, on a : - d'une part $\frac{\pi}{2}-\operatorname{Arcsin} x\in[0,\pi]$: - d'autre part $\cos\left(\frac{\pi}{2}-\operatorname{Arcsin} x\right)=\sin(\operatorname{Arcsin} x)=x$.
On en déduit que :

$$\forall x\in[-1,1]\quad \operatorname{Arccos} x+\operatorname{Arcsin} x=\frac{\pi}{2}$$

5) On voit bien qu'on veut faire intervenir les croissances comparées ici mais il faut bien le justifier. On va donc factoriser par x en haut et en bas du quotient :
Soit $x\in\mathbb{R}_+^*$

$$\frac{7x+\ln(x)}{7x+\exp(x)}=\frac{7+\frac{\ln(x)}{x}}{7+\frac{\exp(x)}{x}}$$

Or $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x)}{x}=0$ et $\lim_{x\to+\infty}\frac{(x)}{x}=+\infty$ donc :

$\boxed{\lim_{x\to+\infty}\frac{7x+\ln(x)}{7x+\exp(x)}=0.}$

6) a) $\boxed{\arctan(1)=\frac{\pi}{4},\arctan(0)=0,\arctan(\sqrt{3})=\frac{\pi}{6}.}$

b) On utilise simplement la croissance de la fonction arctan en remarquant que $0\le\frac{1}{7}\le1$ et $0\le\frac{1}{2}\le1$.

c) Par manipulation d'inégalités, $-\frac{\pi}{2}<\arctan\left(\frac{1}{7}\right)-2\arctan\left(\frac{1}{2}\right)\le\frac{\pi}{4}$.
On peut donc considérer la quantité $\tan(\arctan\left(\frac{1}{7}\right)-2\arctan\left(\frac{1}{2}\right))$ et utiliser la formule d'addition de la tangente. On a :

$$\begin{aligned}\tan(\arctan\left(\frac{1}{7}\right)-2\arctan\left(\frac{1}{2}\right))&=\frac{\tan(\arctan\left(\frac{1}{7}\right))-\tan(2\arctan\left(\frac{1}{2}\right))}{1-\tan(\arctan\left(\frac{1}{7}\right))(-\tan(2\arctan\left(\frac{1}{2}\right)))}\\&=\frac{\frac{1}{7}-\tan(2\arctan\left(\frac{1}{2}\right))}{1-\frac{1}{7}(-\tan(2\arctan\left(\frac{1}{2}\right)))}\end{aligned}$$

De plus par formule d'addition, on a :

$$\tan(2\arctan\left(\frac{1}{2}\right)) = \frac{2\tan(\arctan\left(\frac{1}{2}\right))}{1-\tan(\arctan\left(\frac{1}{2}\right))^2}$$
$$= \frac{1}{1-\frac{1}{4}}$$
$$= \frac{4}{3}$$

Donc : $\tan(\arctan\left(\frac{1}{7}\right) - 2\arctan\left(\frac{1}{2}\right)) = \frac{\frac{1}{7}-\frac{4}{3}}{1-\frac{1}{7}(-\frac{4}{3})} = -1$.

Or $-\frac{\pi}{2} < \arctan\left(\frac{1}{7}\right) - 2\arctan\left(\frac{1}{2}\right) \leq \frac{\pi}{4}$.

On en déduit donc que :

$$\boxed{\arctan\left(\frac{1}{7}\right) - 2\arctan\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{\pi}{4}}$$

7) Par caractérisation, $\bar{f}$ est dérivable si et seulement si sa partie réelle et imaginaire le sont. Or f est dérivable donc $Re(f) = Re(\bar{f})$ et $Im(f) = -Im(\bar{f})$ le sont donc $\bar{f}$ est dérivable.

Exercice n°3 : En lien avec les fonctions puissances

On considère les cas suivants : 1er cas : $0 < a < 1, \ln a < 0$ (Comportement de a^x contraire à celui de la fonction e^x) - Domaine de définition : $D_f = \mathbb{R}$ - Etude aux bornes de D_f :
Quand $x \to -\infty$ $\quad x\ln a \to +\infty$ et $\lim_{x\to-\infty} \mathrm{e}^{x\ln a} \to +\infty$
Quand $x \to +\infty$ $\quad x\ln a \to -\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{x\ln a} \to 0$ (Asymptote horizontale d'équation $y = 0$) - Fonctions dérivées $(a^x)' = \left(\mathrm{e}^{x\ln a'}\right)' = a^x \ln a < 0 a^x$ strictement décroissante sur $\mathbb{R}$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$(a^x)' = a^x \ln a$	$-$		$-$
a^x	$+\infty$ ↘	1	↘ 0

2ème cas : $a > 1, \ln a > 0$ (Comportement de a^x semblable à celui de la fonction e^x) - Domaine de définition : $D_f = \mathbb{R}$ - Etude aux bornes de D_f :
Quand $x \to -\infty$ $\quad x\ln a \to -\infty$ et $\lim_{x\to-\infty} \mathrm{e}^{x\ln a} \to 0$ (Asymptote horizontale d'équation $y = 0$)
Quand $x \to +\infty$ $\quad x\ln a \to +\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{x\ln a} \to +\infty$
- Fonctions dérivées $(a^x)' = a^x \ln a > 0 a^x$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$(a^x)' = a^x \ln a$	$-$		$-$
a^x	$+\infty$ ↘	1	↘ 0

II Problèmes

Problème n° 1

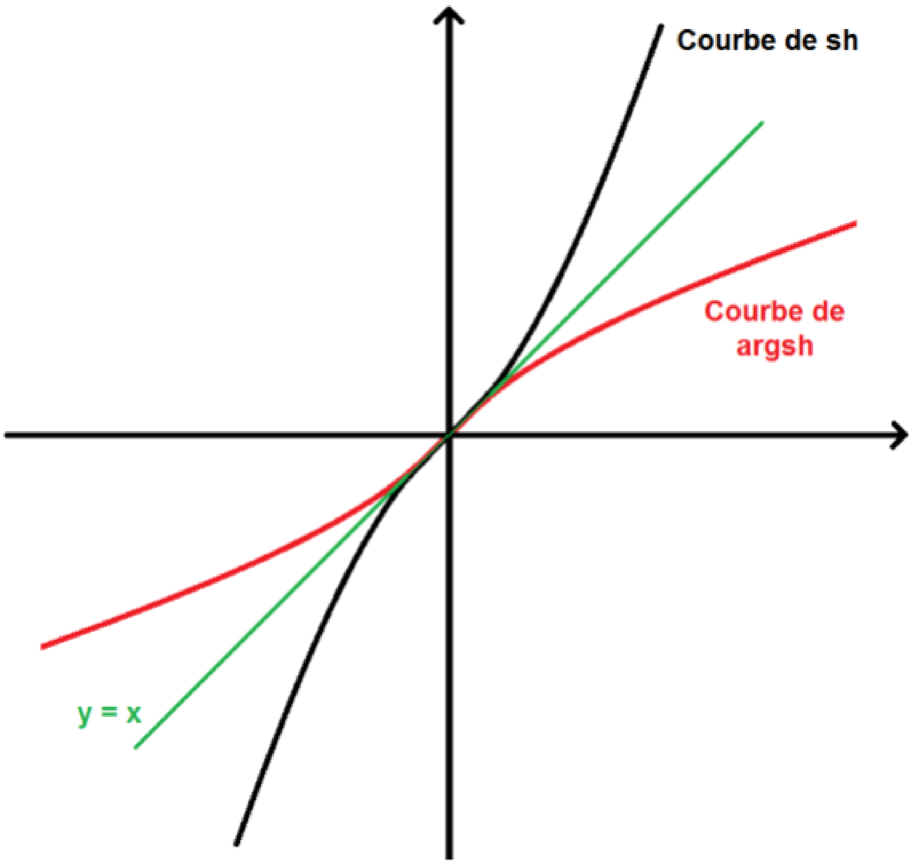
La fonction Argument sinus hyperbolique

Le but de ce problème est d'étudier quelques propriétés de la fonction réciproque de la fonction sinus hyperbolique.

Partie 1 : La fonction argument sinus hyperbolique

1) (Rappel de cours) Voir cours.

2) sinh est impaire et strictement croissante sur $\mathbb{R}$, continue car dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\lim_{x\to+\infty}\sinh(x) = +\infty$, $\lim_{x\to-\infty}\sinh(x) = -\infty$. Par le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, f induit une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.



3)

Partie 2 : Propriétés de la fonction argument sinus hyperbolique

4) La fonction sh : $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbf{R}$, impaire. De plus sa dérivée (ch) ne s'annule pas sur $\mathbf{R}$, il en résulte que Argsh est $\mathcal{C}^\infty$ comme fonction réciproque d'une bijection dérivable dont la dérivée ne s'annule pas. De plus, pour tout $x \in \mathbf{R}$,

$$\operatorname{Argsh}'(x) = \frac{1}{\operatorname{sh}'(\operatorname{Argsh} x)} = \frac{1}{\operatorname{ch}(\operatorname{Argsh} x)}$$

Or ch étant à valeurs strictement positives, on peut écrire à l'aide de la relation fondamentale de trigonométrie hyperbolique que

$$\operatorname{ch}(\operatorname{Argsh} x) = \sqrt{\operatorname{ch}^2(\operatorname{Argsh} x)} = \sqrt{1+\operatorname{sh}^2(\operatorname{Argsh} x)} = \sqrt{1+x^2}$$

Ainsi, pour tout $x \in \mathbf{R}$, on a :

$$\operatorname{Argsh}'(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

5) Soit $x \in \mathbf{R}$, $t \in \mathbf{R}$. Par définition, $\operatorname{Argsh}(x)$ est l'unique solution de l'équation

$$\operatorname{sh}(t) = x$$

Par définition de sh, nous avons

$$\begin{aligned}\operatorname{sh}(t) = x &\iff \frac{e^t - e^{-t}}{2} = x \iff e^t - e^{-t} = 2x \\ &\iff \begin{cases} u = e^t > 0 \\ u - \frac{1}{u} = 2x \end{cases} \iff \begin{cases} u = e^t \\ u^2 - 2xu - 1 = 0 \end{cases}\end{aligned}$$

D'après les formules du second degré, l'équation $u^2 - 2xu - 1 = 0$ admet deux racines réelles distinctes :

$$u_1 = x + \sqrt{1+x^2} > 0 \text{ et } u_2 = x - \sqrt{1+x^2} < 0$$

Ainsi

$$(1) \iff e^t = x + \sqrt{1+x^2} \iff t = \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)$$

D'après le point de vue équation, c'est dire que pour tout $x \in \mathbf{R}$,

$$\operatorname{Argsh}(x) = \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right).$$

Partie 3 : Simplification d'une expression

6) Soit $x \in \mathbf{R}$. On pose $t = \operatorname{Argsh}(x)$, de sorte que $t \in \mathbf{R}$ et $x = \operatorname{sh}(t)$. Par suite

$$2x\sqrt{x^2+1} = 2\operatorname{sh}(t)\sqrt{\operatorname{sh}^2(t)+1} = 2\operatorname{sh}(t)\operatorname{ch}(t) = \operatorname{sh}(2t)$$

Comme $2t \in \mathbf{R}$, on a $f(x) = \operatorname{Argsh}\left(2x\sqrt{x^2+1}\right) = 2t = 2\operatorname{Argsh}(x)$.

7) f est dérivable et pour tout $x \in \mathbf{R}$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{2}{\sqrt{1+4x^2(x^2+1)}} \times \left(\sqrt{x^2+1} + x\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right) \\ &= \frac{2}{\sqrt{1+x^2}} = 2\operatorname{Argsh}'(x)\end{aligned}$$

Par conséquent, il existe une constante C telle que pour tout $x \in \mathbf{R}$,

$$f(x) = C + 2\operatorname{Argsh}(x)$$

En évaluant en 0 , il vient immédiatement $C = 0$ et donc pour tout $x \in \mathbf{R}$, $\quad f(x) = 2\operatorname{Argsh}(x)$

Problème n° 2

Un peu de complexes

1) a) On a

$$a_3 = \sqrt{3} + i = \sqrt{\sqrt{3}^2 + 1^2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = 2e^{i\frac{\pi}{6}}$$

Il en résulte :

$$Z_3 = \frac{a_3}{\overline{a_3}} = \frac{2e^{i\frac{\pi}{6}}}{2e^{-i\frac{\pi}{6}}} = e^{i\frac{\pi}{3}}.$$

b) Les racines $6^{\text{ème}}$ de l'unité sont

$$\omega_k = e^{i\frac{k\pi}{3}}, \quad k \in [\![0, 5]\!].$$

On a donc $Z_3 = \omega_1$ est une racine $6^{\text{ème}}$ de l'unité

2) a) On a

$$\left(\frac{2+i}{2-i}\right)^1 = \frac{2+i}{2-i} = \frac{(2+i)^2}{(2-i)(2+i)} = \frac{3+2i}{3} \neq 1$$

On a done $n \neq 1$

b) Pour $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$, on a

$$(a+ib)+(c+id) = (a+c)+i(b+d) = a'+b'i$$
$$\text{et } (a+ib)(c+id) = (ab-cd)+(ad+bc)i = a''+ib''$$

où $a', b', a'', b'' \in \mathbb{Z}$. C'est-à-dire que les éléments de $\mathbb{C}$ de la forme $A+iB$ avec $A, B \in \mathbb{Z}$ sont stables sous l'addition et la multiplication. Il en résulte que $\forall n \geq 2, \quad \forall k \in [1, n-1], \quad (2-i)^{k-1}(2i)^{n-k}$ est un èlément de la forme $A+iB$, avec $A, B \in \mathbb{Z}$ et

$$\frac{S}{2-i} = \sum_{k=1}^{n-1}\binom{n}{k}(2-i)^{k-1}(2i)^{n-k} \text{ aussi.}$$

c) On a

$$S = \sum_{k=1}^{n-1}\binom{n}{k}(2-i)^k(2i)^{n-k} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(2-i)^k(2i)^{n-k} - (2i)^n - (2-i)^n = (2+i)^n - (2i)^n - (2-i)^n,$$

grâce à la formule du binôme Newton. Or

$$Z_4^n = 1 \iff \frac{(2+i)^n}{(2-i)^n} = 1 \iff (2+i)^n = (2-i)^n$$

Et donc

$$S = -(2i)^n$$

d) Comme on a prouvé que $S = -(2i)^n = (2-i)(A+iB)$ avec $(A, B) \in \mathbb{Z}^2$, si on passe aux modules on obtient :

$$|S|^2 = 2^{2n} = 5\left(A^2 + B^2\right)$$

Or 2^{2n} n'est pas divisible par 5 , donc on a trouvé une absurdité. Finalement il n'existe aucun entier $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $Z_4^n = 1$

Problème n° 3

1) Etudions la fonction u définie sur $\mathbb{R}$ par $u(x)=4x^3-3x$. Comme elle est impaire, on étudie sur $\mathbb{R}^+$. On dérive et on obtient $u'(x)=3\left(4x^2-1\right)$, soit le tableau de variations

x	0	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
$u(x)$	0	$-\infty$	

Pour la limite, on a $4x^3-3x=x^3\left(4-\frac{3}{x^2}\right)\underset{x\to+\infty}{\longrightarrow}+\infty$. On remarque de plus que $u(1)=1$.

Comme arccos est définie sur $[-1,1]$, le tableau de variations de u nous permet de conclure, par les règles de composition usuelles. f est définie sur $[-1,1]$.

2) L'image de $[-1,1]$ par arccos est $[0,\pi]$, donc $f(x)\in[0,\pi]$ et $\pi-f(-x)\in[0,\pi]$. On est donc sur un intervalle sur lequel cos définie une bijection. II suffit de montrer que $\cos(f(x))=\cos(\pi-f(-x))$. Or on a $\cos(f(x))=\cos\left(\arccos\left(4x^3-4x\right)\right)=4x^3-4x$ et par les relations du cercle trigonométrique,

$$\cos(\pi-f(-x))=-\cos(f(-x))=-\arccos\left(-4x^3+4x\right)\Big)=4x^3-4x$$

On conclut que

$$\forall x\in[-1,1],\quad f(-x)=\pi-f(x).$$

3) Linéarisons $4\cos^3(x)-3\cos(x)$, par les formulaires d'Euler et le binôme de Newton, on a

$$\cos^3(x)=\left(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^3=\frac{e^{3ix}+3e^{ix}+3e^{-ix}+e^{3ix}}{8}=\frac{\cos(3x)+3\cos(x)}{4}$$

Il en résulte que

$$4\cos^3(x)-3\cos(x)=\cos(3x)$$

On calcule alors

$$f(\cos(\theta))=\arccos\left(4\cos^3(\theta)-3\cos(\theta)\right)=\arccos(\cos(3\theta))$$

On conclut $\boxed{\forall\theta\in\mathbb{R},\quad f(\cos(\theta))=\arccos(\cos(3\theta))}$

4) Si $3\theta\in[0,\pi]$ (soit $\theta\in\left[0,\frac{\pi}{3}\right]$), la définition de arccos donne $\arccos(\cos(3\theta))=3\theta$, d'où $f(\cos(\theta))=3\theta$. Puis par les relations du cercle trigonométrique, si $\theta\in\left[\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2}\right]$, alors $3\theta\in\left[\pi,\frac{3\pi}{2}\right]$, d'où $2\pi-3\theta-\pi\in\left[\frac{\pi}{2}\subset[0,\pi]\right.$ et $\cos(3\theta)=\cos(2\pi-3\theta)$. Donc $\arccos(\cos(3\theta))=\arccos(\cos(2\pi-3\theta))=2\pi-3\theta$. On conclut

$$f(\cos(\theta))=\begin{cases}3\theta & \theta\in\left[0,\frac{\pi}{3}\right]\\ 2\pi-3\theta & \theta\in\left[\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2}\right]\end{cases}$$

On remarque que la fonction $\theta\mapsto f(\cos(\theta))$ n'est pas dérivable en $\frac{\pi}{3}$. (Cf. expression, "changement de pente brutal") Cela impose la non dérivabilité de f en $\frac{1}{2}=\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$. (Sinon par composition $\theta\mapsto f(\cos(\theta))$ serait dérivable en $\frac{\pi}{3}$.)

5) La fonction arccos est dérivable sur $]-1,1[$, donc par les règles usuelles de dérivation f est dérivable en x si $u(x)\neq\pm1$. L'étude de la question 1 nous permet de dire que f est dérivable par les règles usuelles en $x\in[0,1]$, si $x\neq\frac{1}{2}$ et $x\neq1$.

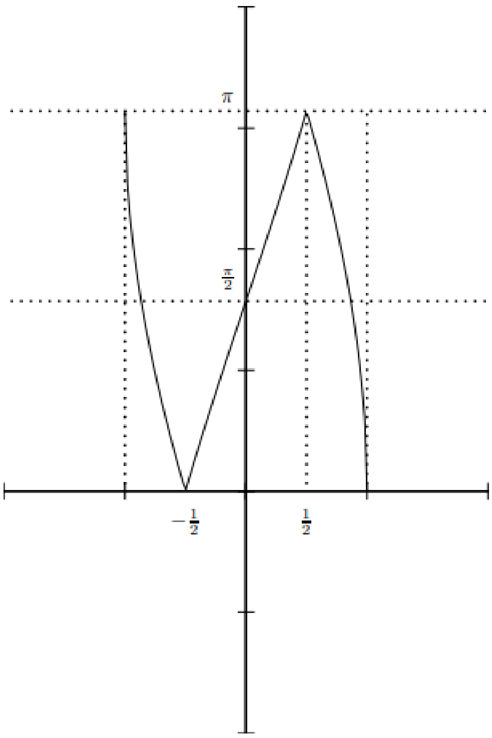
On calcule la dérivée de f par les règles usuelles et on a

6) $$f'(x) = -\frac{3\left(4x^2-1\right)}{\sqrt{1-\left(4x^3-3x\right)^2}}$$

7) La continuité de f et sa dérivée nous donnent directement :

x	0		$\frac{1}{2}$		1
$f'(x)$		$+$	$\Vert$	$-$	
$f(x)$	$\frac{\pi}{2}$	$\nearrow$	π	$\searrow$	0

On trace la courbe de f sur $[0,1]$, puis on complète par symétrie grâce à la question 2.



Problème n° 4

(Plus difficile)

1) Soit on remarque que la fonction f_n est strictement croissante comme somme et composée de fonctions strictement croissantes, soit on dérive et on obtient

$$f_n'(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{1+k^2x^2} > 0$$

Ce qui permet d'obtenir le tableau de variations suivant (aucune indétermination sur les limites aux bornes) :

x	$-\infty$		$+\infty$
$f_n(x)$	$-n\frac{\pi}{2}$	$\nearrow$	$n\frac{\pi}{2}$

Comme la fonction f_n est strictement croissante et continue sur l'intervalle $\mathbb{R}$ et grâce au tableau de variations, on en déduit $f(\mathbb{R}) =]-n\frac{\pi}{2}, n\frac{\pi}{2}[$ et le théorème de la bijection permet donc de conclure l'équation (E_n) a une unique solution.

2) Pour x_1, on a directement $\arctan(x_1) = \frac{\pi}{4}$ soit $x_1 = 1$. Pour x_2, on a $\arctan(x_2)+\arctan(2x_2) = \frac{\pi}{4}$, en utilisant formulaire trigonométrique ($\tan(a+b) = \dots$, on a

$$\frac{3x_2}{1-2x_2^2} = 1$$

D'où $2x_2^2 + 3x_2 - 1 = 0$. On obtient de $x_2 = \frac{-3\pm\sqrt{11}}{4}$. Il exist une unique solution grâce à la question 1 et comme $f_2(0) = 0$, par croissance de $f_2, x_2 > 0$ et on conclut donc

$$x_1 = 1 \text{ et } x_2 = \frac{-3+\sqrt{11}}{4}.$$

3) On remarque que

$$f_{n+1}(x_n) = f_n(x_n) + \arctan((n+1)x_n) = \frac{\pi}{4} + \arctan((n+1)x_n)$$

Comme $f_n(0) = 0$ et f_n croissante, on a $x_n > 0$. Il en résulte que $f_{n+1}(x_n) \geq \frac{\pi}{4}$. On conclut donc La suite (x_n) est décroissante minorée par 0 , donc elle converge vers une limite ℓ.

4) Supposons que $\ell > 0$ (la limite de (x_n) est positive car 0 minore (x_n)), on a alors

$$\frac{\pi}{4} = f_n(x_n) = \sum_{k=0}^{n} \arctan(kx_n) \geq \arctan(nx_n)$$

Par composition des limites, comme $\ell > 0$, on a $nx_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ et $\arctan(nx_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{\pi}{2}$. Soit par passage à la limite dans l'inégalité, $\frac{\pi}{4} \geq \frac{\pi}{2}$. Ce qui est contradictoire, on conclut : la suite (x_n) converge vers 0.

5) a) Définissons sur $\mathbb{R}^+$les fonctions u et v par

$$u(t) = \arctan(t) - t + \frac{t^3}{3}$$

et

$$v(t) = t - \arctan(t)$$

Par les règles usuelles de dérivation, on a

$$u'(t) = \frac{1}{1+t^2} - 1 + t^2 = \frac{t^4}{1+t^2}$$

et

$$v'(t) = 1 - \frac{1}{1+t^2} = \frac{t^2}{1+t^2}$$

Comme les dérivées sont positives, on en déduit les variations suivantes

t	$0 \quad +\infty$
$u(t)$	0
$v(t)$	0

Il en résulte que, pour tout $t \geq 0$,

$$0 \leq u(t) = \arctan(t) - t + \frac{t^3}{3}$$

et

$$0 \leq v(t) = t - \arctan(t)$$

On conclut done

$$\forall t \geq 0, \quad t - \frac{t^3}{3} \leq \arctan(t) \leq t$$

b) Par définition de x_n, on a

$$\frac{\pi}{4} = f_n(x_n) = \sum_{k=1}^{n} \arctan(kx_n)$$

En utilisant l'inégalité de la question précédente et les sommes usuelles, on a

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{k=1}^{n} \arctan(kx_n) \leq \sum_{k=1}^{n} kx_n = x_n \sum_{k=1}^{n} k = x_n \frac{n(n+1)}{2}$$

Puis

$$x_n \frac{n(n+1)}{2} = \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right) n^2 x_n = \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right) u_n$$

On conclut

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{\pi}{4} \leq \frac{n(n+1)}{2} x_n = \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right) u_n.$$

c) En utilisant à nouveau la question 5.(a), on a

$$f_n\left(\frac{2}{n^2}\right) = \sum_{k=1}^{n} \arctan\left(\frac{2k}{n^2}\right) \geq \sum_{k=1}^{n} \frac{2k}{n^2} - \frac{8k^3}{3n^6}$$

Soit

$$f_n\left(\frac{2}{n^2}\right) \geq \frac{2}{n^2} \sum_{k=1}^{n} k - \frac{8}{n^6} \sum_{k=1}^{n} k^3$$

Les sommes usuelles nous donnent

$$\frac{2}{n^2} \sum_{k=1}^{n} k - \frac{8}{n^6} \sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{2}{n^2} \frac{n(n+1)}{2} - \frac{8}{3n^6} \frac{n^2(n+1)^2}{4} = \frac{(n+1)}{n} - 2\frac{(n+1)^2}{3n^4}$$

On conclut done

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad f_n\left(\frac{2}{n^2}\right) \geq \frac{(n+1)}{n} - 2\frac{(n+1)^2}{3n^2}$$

d) Grâce à la question précédente, on a

$$f_n\left(\frac{2}{n^2}\right) - 1 = \frac{1}{n} - 2\frac{(n+1)^2}{3n^4} = \frac{3n^3 - 2(n+1)^2}{3n^4} = \frac{3n^3 - 2n^2 - 4n - 2}{3n^4} = \underbrace{\frac{1}{n}\left(\frac{3 - \frac{2}{n} - \frac{4}{n^2} - 2\frac{1}{n^3}}{3}\right)}_{n \to +\infty}.$$

On conclut donc Pour n suffisamment grand, on a $f_n\left(\frac{2}{n^2}\right) \geq 1$. Comme f_n croissante, pour n suffisamment grand, $f_n(x_n) = \frac{\pi}{4} < 1 \leq f_n\left(\frac{2}{n^2}\right)$, il en résulte donc que Pour n suffisamment grand, on a $x_n \leq \frac{2}{n^2}$.

e) On a, en utilisant la question 5.(a),

$$\frac{\pi}{4} = f_n(x_n) = \sum_{k=1}^{n} \arctan(kx_n) \geq \sum_{k=1}^{n} kx_n - \frac{1}{3}(kx_n)^3.$$

Il en résulte

$$\sum_{k=1}^{n} kx_n \leq \frac{\pi}{4} + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{3}(kx_n)^3$$

On a donc, grâce aux sommes usuelles,

$$\frac{n(n+1)}{2} x_n \leq \frac{\pi}{4} + \frac{1}{3} x_n^3 \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

Comme pour n suffisamment grand, on a $x_n \leq \frac{2}{n^2}$, on en déduit que pour n suffisamment grand

$$\frac{n(n+1)}{2} x_n \leq \frac{\pi}{4} + \frac{1}{3}\left(\frac{2}{n^2}\right)^3 \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

Après simplification, on conclut bien que pour n suffisamment grand, on a $\frac{n(n+1)}{2} x_n \leq \frac{\pi}{4} + 2\frac{(n+1)^2}{3n^4}$.

f) Grâce à la question 5.(b), on a

$$\frac{\pi}{2\left(1+\frac{1}{n}\right)} \leq u_n$$

Grâce à la question 5.(e), on a, pour n suffisamment grand,

$$\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right) u_n = \frac{n(n+1)}{2} x_n \leq \frac{\pi}{4} + \frac{2}{3} \frac{(n+1)^2}{n^4}$$

Il en résulte, pour n suffisamment grand,

$$\frac{\pi}{2\left(1+\frac{1}{n}\right)} \leq u_n \leq \frac{2}{1+\frac{1}{n}}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{2}{3} \frac{(n+1)^2}{n^4}\right).$$

Comme $\frac{(n+1)^2}{n^4} = \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^2}{n^2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, par le théorème des gendarmes, on conclut que la suite (u_n) converge vers $\frac{\pi}{2}$.