Chapitre 15 : Dérivabilité

E) Fonctions de classe C_k

- Définitions générales
- Premiers résultats
- Formule de Leibniz.
- Opérations sur les fonctions de classe C_k.
- Preuve qu'une fonction est de classe C_k ou C_∞ par récurrence par théorème limite de la dérivée.

F) Fonctions dérivables à valeurs complexes

- Adaptation des définitions et théorèmes existants aux cas complexes.

Chapitre 16 : Convexité

A) Définitions et exemples

- Définition barycentres
- Définition de la convexité
- Premiers exemples.

b) Caractérisation et conséquences de la convexité

- Définition cordes et sécantes
- Position de la courbe d'une fonction convexe par rapport à ses cordes ou à ses sécantes.
- Pour $f : I \to \mathbb{R}$, $a \in I$, et

$$\begin{aligned} \tau_a : I\backslash\{a\} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \end{aligned}$$

  alors τ_a croissante pour tout a dans $I \iff f$ croissante.
- Inégalité des pentes
- Continuité des fonctions convexes sur un intervalles ouvert.
- Inégalité de Jensen

c) Fonctions convexes dérivables et deux fois dérivables

- Une fonction dérivable est convexe si et seulement si sa dérivée est croissante.
- Position du graphe d'une fonction convexe dérivable par rapport à ses tangentes.
- Caractérisation des fonctions convexes deux fois dérivables
- Définition d'un point d'inflexion

D) Exemples de fonctions convexes et applications de la convexités

- Convexité et concavité pour les fonctions ln, exp,cos,sin, $x \mapsto x^2$, $x \mapsto x^3$, $x \mapsto \sqrt{x}$.
- Inégalités obtenues par rapport aux cordes de la fonction et à ses tangentes.

Questions de cours :

- Démonstration formule de Leibniz et application au calcul d'une dérivée de classe C_n au choix du colleur.
- Pour $f : I \to \mathbb{R}$, $a \in I$, et

$$\begin{aligned} \tau_a : I\backslash\{a\} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \end{aligned}$$

  alors τ_a croissante pour tout a dans $I \iff f$ convexe.
- Montrer qu'une fonction dérivable est convexe si et seulement si sa dérivée est croissante.
- Preuve inégalité de Jensen.