Chapitre 19 : Polynômes

A) Anneau des polynômes à une indéterminée

- Anneau $\mathbb{K}[X]$ pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Cet anneau est commutatif
- Dégré, coefficient dominant,polynôme unitaire,
- Dégré d'une somme, d'un produit
- Composition de deux polynômes.
- $(\mathbb{K}_n[X], +)$ sous groupe de $(\mathbb{K}[X], +)$
- $K[X]$ est intègre.

B) Divisibilité

- Définition divisibilité de polynômes, diviseurs, multiples...
- Premières propriétés
- Lien entre divisibilité et degré
- Caractérisation des polynômes associés
- Théorème et algorithme de la division euclidienne

C) Fonction polynomiales et racines

- Fonction polynomiale associée à un polynôme
- Evaluation d'un polynôme (méthode de Horner)
- Racines d'un polynôme
- Lien entre racine d'un polynôme et divisibilité
- Multiplicité d'une racine
- Le nombre de racines d'un polynôme non nul est majoré par son degré
- Polynôme scindé, relations coefficients racines.

D) Polynôme dérivé

- Définition
- Degré du polnôme dérivé et des dérivées successives
- Opérations sur les polynômes dérivées (somme, produit, Leibniz,...)
- Formule de Taylor
- Lien entre dérivées successives et multiplicité des racines.

E) Arithmétique des polynômes

- PGCD/PPCM
- Premières propriétés
- Algorithme d'Euclide étendu et conséquences
- Polynômes premiers entre eux
- Théorème de Bézout
- Lien avec les racines
- Extension PGCD/PPCM à un nombre fini de polynômes
- Théorème de Gauss

Questions de cours :

- On prouvera les résultats suivants.
  1) Montrer que : λ racine de $P \in \mathbb{K}[X] \Leftrightarrow (X-\lambda)|P$.
  2) Soit $P \in \mathbb{K}[X]\backslash\{0\}, \lambda \in \mathbb{K}$ et $m \in \mathbb{N}$. $m_\lambda(P) = m$ si et seulement si il existe $Q \in \mathbb{K}[X]$ tel que $P = (X-\lambda)^m Q$ et $Q(\lambda) \neq 0$.
  3) Soit $(P,Q) \in (\mathbb{K}[X]\backslash\{0\})^2$, montrer que $\forall \lambda \in \mathbb{K}, m_{PQ}(\lambda) = m_P(\lambda) + m_Q(\lambda)$.
- On prouvera les résultats suivants :
  1) Prouver que la somme des multiplicités des racines d'un polynômes est plus petite que son dégré.
  2) Prouver qu'un polynôme de degré $n \in \mathbb{N}$ a au plus n racines distinctes.
- On prouvera les résultats suivants :
  1) Preuve de la formule de Taylor.
  2) (Caractérisation de la multiplicité par les dérivées successives). Soit $P \in \mathbb{K}[X]\backslash\{0\}$, soit $\lambda \in \mathbb{K}$ et soit $m \in \mathbb{N}$. λ est racine de P de multiplicité m si et seulement si

$$\forall k \in [\![0; m-1]\!], P^{(k)}(\lambda) = 0 \quad \text{et} \quad P^{(m)}(\lambda) \neq 0$$

- On prouvera les résultats suivants :
  1) En admettant qu'un polynôme ayant plus de racines que son degré est nul montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, \forall (Q,P) \in \mathbb{K}_n[X], \forall (x_1, \ldots, x_{n+1}) \in \mathbb{K}^n$ distincts si $\forall i \in [\![1,n]\!] Q(x_i) = P(x_i)$ alors $Q = P$.
  2) (Vu en TD) Montrer que les polynômes de $\mathbb{R}[X]$ ayant une fonction polynômiale associée constante sont constant.
  3) (vu en TD) Montrer qu'il n'existe pas de polynôme P de $\mathbb{C}[X]$ vérifiant $\forall z \in \mathbb{C}, P(z) = \bar{z}$.