Programme de colle n°20

Chapitre 19 : Polynômes

F) Polynômes irréductibles

- Polynômes irréductibles, réductibles, constants
- Deux polynômes irréductibles sont associés ou premiers entre eux.
- Lemme d'Euclide
- Irréductibles de $\mathbb{C}[X]$ et de $\mathbb{R}[X]$
- Décomposition en facteurs irréductibles

G) Interpolation de Lagrange

1) Polynômes de Lagrange et polynôme interpolateurs de Lagrange.

Chapitre 20 : Fractions rationnelles

A) Le corps des fractions rationnelles

- Définitions et exemples
- Le corps $\mathbb{K}(X)$
- Degré d'une fraction rationnelle
- Partie entière, partie polaire
- racines et pôles
- Fonctions rationelles

B) Décomposition en éléments simples

- Existence et unicité de la décomposition en éléments simples dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
- Méthodes pour déterminer les coefficients :
- Pour les pôles simples
- Pour les coefficients de dégré maximal pour un pôle multiple
- Méthode sur la parité, sur la limite (sur $\mathbb{R}$),sur l'évaluation en un point précis. (L'identification est à proscrire pour ce chapitre).
- Décomposition en éléments simples de $\frac{P'}{P}$ pour $P \in \mathbb{R}[X]$

C) Application de la DES

- Calcul de primitives de fraction rationnelles
- Calcul de dérivée

Questions de cours :

- On prouvera les résultats suivants :
  1) Preuve théorème d'interpolation de Lagrange (existence, unicité et forme du polynôme interpolateur)
  2) Application : Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ il existe $(\lambda_0, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tel que :
  $$\forall P \in \mathbb{R}_n[X], \int_0^1 P(t)dt = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k P\left(\frac{k}{n}\right)$$
- **1)** En utilisant le théorème de d'Alembert Gauss, montrer que tout polynôme de $\mathbb{C}[X]$ est scindé.
  2) En déduire le théorème de décomposition en facteurs irréductibles sur $\mathbb{C}$.
- **1)** Montrer qu'un polynôme de dégré 2 de $\mathbb{R}[X]$ n'admettant pas de racines est irréductible.
  2) Montrer que si $\alpha \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$ racine de $P \in \mathbb{R}[X]$, $\bar{\alpha}$ est également racine de P de même multiplicité.
  3) En déduire le théorème de décomposition en facteurs irréductibles sur $\mathbb{R}[X]$
- Calcul complet d'une primitive/intégrale au choix du colleur impliquant une fraction rationnelle à l'aide de la décomposition en éléments simple.