Chapitre 21 : Analyse asymptotique

A) Relation de domination, négligeabilité et équivalence

- Définitions, lien entre les différentes relations
- Notations $o, O, \sim$.
- Opérations sur la manipulation des relations
- Lien entre les différentes relations et le quotient des deux fonctions comparées.
- Traduction des croissances comparées à l'aide de ses relations
- Obtention d'un équivalent par encadrement
- Conservation du signe de la "non-annulation" et de la limite pour les équivalents.

B) Développements limités (en 0)

- Définition du développement limité en 0 à l'ordre $n \in \mathbb{N}$.
- Unicité du développement limité.
- Troncature d'un DL à l'ordre n à l'ordre $k \leq n$.
- Utilisation de la parité/imparité des fonctions dans les DL.
- Opérations sur les DL(somme, multiplication par un scalaire, produit et composée).
- Développement limité usuels
- Méthode de DL pour un quotient.

C) Développement limité en un point réel adhérent à l'intervalle de définition de la fonction

- Définition
- Lien avec le DL en 0.

D) Existence de développements limités

- Primitivation de DL
- Formule de Taylor-Young
- Développements limités usuels et leur preuve
- Développement limité à l'ordre 3 de la tangente

E)Applications des développements limités

- Recherche d'équivalents en un point et signe de la fonction au voisinage du point.
- Position locale de la courbe par rapport à sa tangente
- Existence ou non d'extremum local au point A.
- Calcul de dérivées (par Taylor-Young).

F) Développements asymptotiques

- Observés sous le prisme de certains exemples

E) Comparaisons avec les suites

- Définitions et propriétés maintenues parrapport à l'étude des fonctions.
- Des suites extraites (pour la même extractrice) de 2 suites équivalentes sont équivalentes.
- Formule de Stirling (admis)
- Développement asymptotique du logarithme de la factorielle.

Chapitre 22 : Espaces vectoriels (1)

A) Premières définitions

- Loi externe
- Définition espace vectoriel, et caractérisation équivalentes
- Espaces vectoriels usuels
- Produit d'espaces vectoriels
- Règles de calcules (pour les neutres et opposés) dans un espace vectoriels
- Combinaison linéaire d'éléments d'un espace vectoriel et stabilité des espaces vectoriels par combinaisons linéaires (finies). Famille presque nulles.

B) Sous-espaces vectoriels

- Définition et caractérisation
- Exemples usuels de Sous-espaces vectoriels.
- Sous espace vectioriel engendré par une partie ou une famille (et opérations sur ces espaces).
- Droite et plans vectoriels.
- Modification d'une famille de vecteurs laissant stable son espace vectoriel engendré.
- Intersection de sous espaces vectoriels.

C) Somme de 2 sous espaces vectoriels.

- définition de $F+G$ comme $(F\cup G)$ et première caractérisation.
- Ecriture des vecteurs de $F+G$ comme somme (pas forcément unique) d'un élément de F et d'un élément de G.
- Sous-espaces vectoriels en somme directe
- Caractérisation de la somme directe par intersection
- Sous-espaces vectoriels supplémentaires
- Caracatérisation du supplémentaire par écriture comme somme ou par l'intersection
- Exemples

C) Familles libres, génératrices et bases

- Def famille libres génératrices et bases
- Définition familles liées
- Un famille est liée si et seulement si un des vecteurs de la famille s'écrit comme combinaison linéaire des autres
- sous-famille d'une famille libre, sur-famille d'une famille liée ou génératrice
- Famille augmentée d'un vecteur d'une famille libre
- Toute famille de $p+1\in\mathbb{N}$ vecteurs engendrée par p vecteurs est liée
- Existence et unicité de la décomposition dans une abse
- Coordonnées dans une base
- Bases canoniques
- Famille de polynômes échelonnés en degré.

Questions de cours :

- Pour cette question on admettra le lien entre existence de développements limité à l'ordre 0 (resp.1) d'une fonction en un point a et sa continuité (resp sa dérivabilité) et on montrera le résultat suivant, puis on l'appliquera à l'étude de $x\mapsto\frac{e^x}{\sqrt{1+x^2}}$ au voisinage de 0. :
  Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, soit a $\in I$ et soit $f\in\mathcal{C}(I,\mathbb{R})$. On note $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé fixé. On suppose que f admet un développement limité à l'ordre $n\geqslant 2$ en a de la forme :
  $$\forall x\in I, f(x)=a_0+a_1(x-a)+a_n(x-a)^n+\underset{x\to a}{o}((x-a)^n),$$
  avec $a_n\neq 0$. Alors f est dérivable en a, $a_0=f(a)$, $a_1=f'(a)$ et :
  1) L'équation de la tangente à $\mathcal{C}_f$ en $(a,f(a))$ est $(T_a): y=a_0+a_1(x-a)$;
  2) La position de $\mathcal{C}_f$ par rapport à (T_a) au voisinage de $(a,f(a))$ dépend du signe de a_n et de la parité de n :
     - si n est pair, alors $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de (T_a) si $a_n>0$ et en dessous si $a_n<0$;
     - si n est impair, alors $\mathcal{C}_f$ traverse (T_a) en $(a,f(a))$, qui est donc un point d'inflexion de $\mathcal{C}_f$.
- Calcul du développement asymptotique à 3 termes en de $x\mapsto\frac{1}{\sin(x)}$ en 0 ainsi que du développement asymptotique de $x\mapsto\ln(1+x)$ à 4 termes en $+\infty$. On demandera aussi de redonner la formule de Stirling.
- Soit E un $\mathbb{K}$ espace vectoriel et $(A,B)\subset E$. On prouvera les propriétés suivantes :
  1) $A\subset Vect(A)$ avec égalité si et seulement si A est un sous-espace vectoriel de E.
  2) Si $A\subset B$ et B espace vectoriel, alors $Vect(A)\subset B$.
  3) $$\text{vect}(\text{vect}(A))=\text{vect}(A)\,;$$
  4) $$\text{vect}(\text{vect}(A)\cup B)=\text{vect}(A\cup B)$$
  5) $$\text{vect}(A\cup B)=\text{vect}(A)\iff B\subset\text{vect}(A)$$
- Preuve du résultat suivant : Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, soit $p\in\mathbb{N}$ et soit $\left(x_1,\dots,x_{p+1}\right)\in E^{p+1}$. Si $x_1,\dots,x_{p+1}$ sont combinaison linéaires de p mêmes vecteurs $\left(y_1,\dots,y_p\right)\in E^p$, alors la famille $\left(x_1,\dots,x_{p+1}\right)$ est liée.