# Chapitre 23 : Dimension finie

A) Espaces vectoriels de dimension finie

- Définition par existence d'une fmaille génératrice finie
- Familles libres et génératrices en dim finie
- Une famille libre en dim finie est finie, une famille génératrice admet une sous-famille génératrice
- Existence de base en dimension finie
- Lemme de la base incomplète
- Théorème de la base incomplète
- Théorème de la base extrait

B) Dimension d'un espace vectoriel de dimension finie

- Toutes les bases d'un espace vectoriel de dimension finie sont finies et ont même cardinal, c'est la dimensiun de l'espace.
- Caractérisation des espaces vectoriels de dimension $0, 1$ et $2$.
- Famille libres et génératrices en dimension finie(2)
- Lien entre le cardinal d'une famille libre, liée, génératrice, base en fonction du cardinal.
- Pour une famille de cardinal dim(E), être libre est équivalent à être générateur, est équivalent à être une base.
- Rang d'une famille de vecteurs
- Invariance du rang d'une famille de vecteurs par "opérations élémentaires" (addition d'un vecteur à un autre, multiplication par un scalaire d'run vecteur, échange de 2 vecteurs, suppression de vecteurs combinaisons linaires d'autres vecteurs de la famille.
- Produit d'espaces vectoriels de dimension finie

  C) Sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel de dimension finie

  - Dimension d'un sous-espace vectoriel
  - Bases adaptées à un sous-espace vectoriel
  - Somme de sous-espaces vectoriels
  - Caractérisation somme directe et supplémentaires en dimension finie
  - Existence d'un supplémentaire en dimension finie
  - Base adaptée à un supplémentaire en dimension finie (vu Lundi)

## Questions de cours :

  - Soit $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie. Toute famille libre de $E$ est finie.
  - Soit $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie. Pour toute famille génératrice $G$ de $E$, il existe une sous-famille $G' \subset G$ finie et encore génératrice de $E$.

- Preuve du lemme et théorème de la base incomplète et preuve du théorème de la base extraite.
- Preuve de la formule de Grassman :
  **1)** On commence par le prouver dans le cas où les 2 SEV sont en somme directe
  **2)** Dans le cas général, on admet qu'il existe que pour $F, G$ 2 sev de $E$ en dimension finie, il existe $S$ supplémentaire de $F \cap G$ dans $G$ tel que $F \bigoplus S = F + G$.