TD 23 : Applications linéaires

Généralités,noyaux et images : pratique

1 Sur le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $E = \mathcal{C}(\mathbb{R})$, on définit l'application φ par $\varphi(f) = g$ où :

$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \int_0^x tf(t)dt$$

Démontrer que φ est un endomorphisme de E. Est-il injectif, surjectif ?

2 Soit $E = \mathcal{C}^\infty$. Soient $\varphi : E \to E$ et $\psi : E \to E$ les applications définies par :

$$\varphi(f) = f'$$
$$\forall x \in \mathbb{R}, \psi(f)(x) = \int_0^x f(t)\mathrm{d}t$$

1) Montrer que φ et ψ sont des endomorphismes de E.
2) Exprimer $\varphi \circ \psi$ et $\psi \circ \varphi$.
3) Déterminer images et noyaux de φ et ψ.

3 Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On pose f_λ : $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

$$(x, y, z) \mapsto (\lambda x + y + z, x + \lambda y + z, x + y + \lambda z)$$

1) Montrer que f_λ est $\mathbb{R}$-linéaire pour tout λ.
2) Déterminer $\operatorname{Im} f_\lambda$ et $\operatorname{Ker} f_\lambda$ selon la valeur de λ.

4 Soit $a \in \mathbb{C}^*$. On pose f :

$$\mathbb{C} \to \mathbb{C}$$
$$z \mapsto z + a\bar{z}$$

1) Montrer que f est $\mathbb{R}$-linéaire.
2) Déterminer $\operatorname{Im} f$ et $\operatorname{Ker} f$.

5 Soit $E = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $\varphi : E \to E$

$$f \mapsto f'' - 3f' + 2f$$

1) Montrer que φ est un endomorphisme.
2) Déterminer $\operatorname{Ker} f$.
3) Montrer que $\operatorname{Ker} f$ est isomorphe à $\mathbb{R}^2$ en explicitant un isomorphisme.

6 Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$ et $f : E \to E$

$$P \mapsto P - P'$$

1) Montrer que $\left(\sum_{j=0}^{k} \frac{X^j}{j!}\right)_{k \in [\![0;n]\!]}$ est une base de E.
2) Montrer que $f \in \mathrm{GL}(E)$ et déterminer f^{-1}.

7 Soit $a \in \mathbb{R}_+$et $f : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X]$

$$P \mapsto \left(X^2 - 1\right)P' - aXP$$

1) Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$.
2) Déterminer le degré de $f(P)$ en fonction de celui de P.
3) Si $a \notin \mathbb{N}$, montrer que f est injectif. Est-ce un automorphisme de $\mathbb{R}[X]$?

Noyaux et images : théorie

8 Soient f et g deux endomorphismes d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E. Montrer que :

$$g \circ f = 0 \iff \operatorname{Im} f \subset \operatorname{Ker} g$$

9 Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et f et g deux endomorphismes de E tels que $f \circ g = g \circ f$. Démontrer que :

1) $\forall x \in \operatorname{Ker}(f), g(x) \in \operatorname{Ker}(f)$
2) $\forall x \in \operatorname{Im}(f), g(x) \in \operatorname{Im}(f)$

10 Soient f et g deux endomorphismes d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E. Montrer que :

a) $\operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Ker} g \subset \operatorname{Ker}(f+g)$

b) $\operatorname{Im}(f+g) \subset \operatorname{Im} f + \operatorname{Im} g$

c) $\operatorname{Ker} f \subset \operatorname{Ker} f^2$

d) $\operatorname{Im} f^2 \subset \operatorname{Im} f$

11 Soit f un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E. Montrer que :.

1) $\operatorname{Im} f \cap \operatorname{Ker} f = \{0\} \Leftrightarrow \operatorname{Ker} f = \operatorname{Ker} f^2$

2) $E = \operatorname{Im} f + \operatorname{Ker} f \Leftrightarrow \operatorname{Im} f = \operatorname{Im} f^2$

12 ★ Soit f un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E vérifiant $f^3 = f$. Montrer que :

$$\operatorname{Ker}(f) \oplus \operatorname{Im}(f) = E$$

13 ★ Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f^2 - 3f + 2\mathrm{Id} = 0$.

1) Montrer que f est inversible et exprimer son inverse en fonction de f.

2) Etablir que $\operatorname{Ker}(f - \mathrm{Id})$ et $\operatorname{Ker}(f - 2\mathrm{Id})$ sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires de E.

Projecteurs et symétries

14 On considère l'application linéaire $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ définie par $f(x,y,z) = (2x-2z, y, x-z)$. f est-elle une symétrie ? une projection ? Déterminer une base de ses éléments caractéristiques.

15 On considère l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ muni de la base canonique $\mathcal{B}$. On note $\mathcal{P}$ le plan d'équation $x+y+z=0$ et $\mathcal{D}$ la droite d'équation $x = \frac{y}{3} = \frac{z}{2}$. Soit p la projection sur $\mathcal{P}$ parallèlement à $\mathcal{D}$.

1) Montrer que $\mathcal{P} \oplus \mathcal{D} = \mathbb{R}^3$ (Evidemment si p est un projecteur/projection c'est le cas mais pour qu'une telle projection existe, il faut déjà vérifier que ces 2 espaces sont bien supplémentaires).

2) Soit u un vecteur de $\mathbb{R}^3$ de coordonnées (x,y,z) dans $\mathcal{B}$. Calculer $p(u)$.

16 Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, et soit p,q deux projecteurs de E qui commutent et tels que $\operatorname{Im} p = \operatorname{Im} q$. Montrer que $p = q$.

17 Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, et soit $(f,g) \in \mathcal{L}(E)^2$. Montrer que f et g sont des projecteurs de même noyau si et seulement si $f \circ g = f$ et $g \circ f = g$.

18 ★ Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et p,q deux projecteurs de E qui commutent. Montrer que $p \circ q$ est un projecteur de E et que :

$$\operatorname{Ker} p + \operatorname{Ker} q = \operatorname{Ker}(p \circ q) \text{ et } \operatorname{Im}(p) \cap \operatorname{Im}(q) = \operatorname{Im}(p \circ q)$$

Dimension finie,rang et théorème du rang

19 Déterminer une base du noyau et de l'image des applications linéaires suivantes :

1) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ définie par $f(x,y,z) = (y-z, z-x, x-y)$.

2) $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ définie par :

$$f(x,y,z,t) = (2x+y+z, x+y+t, x+z-t)$$

3) $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ définie par $f(z) = z + i\bar{z}$ ($\mathbb{C}$ est ici vu comme un $\mathbb{R}$-espace vectoriel).

20 Exercice 14. Déterminer le rang des applications linéaires suivantes

1) $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^6$

2) g_λ :

$$\left(x_1, x_2, x_3, x_4\right) \mapsto \left(x_2 - x_1, x_3 - x_1, x_4 - x_1, x_3 - x_2, x_4 - x_2, x_4 - x_3\right)$$

$(x,y,z) \mapsto (2x + \lambda y - z, 2x + 2y, x - 2z)$

3) h_λ : $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ selon $\lambda \in \mathbb{R}$. $(x,y,z) \mapsto \left(x + \frac{1}{2}y + \frac{1}{3}z, \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}y + \frac{1}{4}z, \frac{1}{3}x + \frac{1}{4}y + \lambda z\right)$

21 Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$ et $g \in \mathcal{L}(F,G)$ où E est de dimension finie. Montrer que :

$$\dim(\operatorname{Im} f \cap \operatorname{Ker} g) = \dim \operatorname{Im} f - \dim \operatorname{Im}(g \circ f).$$

22 Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n et $u \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que $\operatorname{Ker} u = \operatorname{Im} u$ si et seulement si il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2p, u^2 = 0$, et $\operatorname{rg} u = p$.

23 Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on pose $N_k = \operatorname{Ker} f^k$ et $I_k = \operatorname{Im} f^k$.

1) Montrer que : $\forall k \in \mathbb{N}, N_k \subset N_{k+1}$ et $I_{k+1} \subset I_k$.

2) Montrer qu'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $N_p = N_{p+1}$, puis que : $\forall k \geqslant 0, N_p = N_{p+k}$.

3) Montrer que N_k et I_k sont stationnaires à partir d'un même rang $p = q$.

4) Montrer que $N_p \oplus I_p = E$.

24 Justifier qu'il existe une unique application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$ telle que $f(1,0,0) = (0,1), f(1,1,0) = (1,0)$ et $f(1,1,1) = (1,1)$. Exprimer $f(x,y,z)$ et déterminer le noyau et l'image de f.

25 Soit E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie, et soit $(u,v) \in \mathcal{L}(E,F)^2$. Montrer que :

$$|\operatorname{rg} u - \operatorname{rg} v| \leqslant \operatorname{rg}(u+v) \leqslant \inf(\dim E, \dim F, \operatorname{rg} u + \operatorname{rg} v).$$

26

1) Soit $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ une application linéaire. On suppose que $\dim(\operatorname{Ker}(\varphi)) = 2$. Montrer que φ n'est pas surjective.

2) Soit $\psi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ une application linéaire.
On suppose que $\dim(\operatorname{Im}(\psi)) = 1$. Montrer que ψ n'est pas injective.

27 Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}$. Montrer qu'il existe un endomorphisme f tel que $\operatorname{Im}(f) = \operatorname{Ker}(f)$ si et seulement si n est pair.

28 Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\operatorname{rg}\left(f^2\right) = \operatorname{rg}(f)$.

Etablir $\operatorname{Im}\left(f^2\right) = \operatorname{Im}(f)$ et $\operatorname{Ker}\left(f^2\right) = \operatorname{Ker}(f)$.

Montrer que $\operatorname{Im}(f)$ et $\operatorname{Ker}(f)$ sont supplémentaires dans E.

29 ★ Soient $(f,g) \in \mathcal{L}(E)^2$ tels que :

$$f + g = \mathrm{Id} \text{ et } \operatorname{rg}(f) + \operatorname{rg}(g) = \dim E$$

Montrer que f et g sont des projecteurs.

Formes linéaires et hyperplans

30 Soit F un sous-espace vectoriel de E. Montrer que $\dim F < \dim E$, si, et seulement si, F est inclus dans un hyperplan de E.

31 Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, et $\varphi_1, \ldots, \varphi_m$ des formes linéaires sur E. Montrer l'équivalence entre les deux assertions suivantes :

1) $\dim\left(\bigcap_{i=1}^m \operatorname{Ker} \varphi_i\right) = \dim E - m$

2) la famille $(\varphi_1, \ldots, \varphi_m)$ est libre.

Indication. Considérer l'application $u : E \to \mathbb{K}^m$

$$x \longmapsto (\varphi_1(x), \ldots, \varphi_m(x)).$$