TD 22 : Dimension finie

1 Dans $\mathbb{R}^4$, considérons le sous-espace vectoriel :

$$F = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : x_1 + x_2 = x_3 + x_4 = 0\}.$$

Montrer qu'il s'agit d'un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ et donner sa dimension.

2 Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n, et soit $(u_1, \dots, u_n)$ une base de E. Pour tout $k \in [\![1;n]\!]$, on pose $v_k = \sum_{i=1}^k u_i$. Montrer que $(v_1, \dots, v_n)$ est une base de E.

3 Dans $\mathbb{R}^4$ muni de sa structure d'espace vectoriel usuelle, on considère les vecteurs :

$$v_1 = (1,0,2,3), v_2 = (0,3,1,4), v_3 = (-2,0,3,10), v_4 = (1,1,0,-1)$$

1) Déterminer le rang de cette famille.
2) Déterminer toutes les sous-familles libres de la famille (v_1, v_2, v_3, v_4).

4 Déterminer le rang de :

1) $(1,2,1,-1), (0,6,-1,-2), (4,-2,5,-2)$;
2) $(1,0,2,3), (7,4,-2,-1), (5,2,4,7), (3,2,0,1), (-2,0,1,3)$;
3) $(\sin 1, \sin 2, \sin 3, \sin 4), (\sin 2, \sin 3, \sin 4, \sin 5), (\sin 3, \sin 4, \sin 5, \sin 6)$, $(\sin 4, \sin 5, \sin 6, \sin 7)$.

5 . Dans $\mathbb{R}^4$ muni de ses lois usuelles, on pose :

$$F = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + 2y - z + t = 0 \text{ et } 2x + y + 2z - t = 0\}$$
$$G = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid -3x - 2z + 3t = 0 \text{ et } -2x - 2y + z + t = 0\}$$

1) Montrer que $\mathbb{R}^4 = F \oplus G$.
2) Déterminer une base de $\mathbb{R}^4$ adaptée à cette décomposition en somme directe.

6 Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n. Soit $\mathcal{F} = (u_1, \dots, u_n)$ une famille de n vecteurs de rang s. On suppose que la famille $\mathcal{F}' = (u_1, \dots, u_r)$ est de rang s', pour $r \leqslant n$. Montrer que $s' \geqslant r + s - n$.

7 Dans chacun des cas, déterminer un supplémentaire du sous-espace vectoriel F dans E :$E = \mathbb{R}^4, F = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + y + z - t = 0 \text{ et } 2x - y + 2t = 0\}$.
$E = \mathbb{R}_4[X], F = \{P \in E \mid P(0) = P(1) = 0\}$.

8 Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n. Soit H_1 et H_2 deux sous-espaces vectoriels de E de dimension $n-1$ (des hyperplans). Déterminer $\dim H_1 + H_2$ puis $\dim H_1 \cap H_2$.

9

★ Soit $F = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}), f(0) + f(1) = 0\}$.

1) Montrer que F est un sous-espace vectoriel.
2) Déterminer un supplémentaire de F dans $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

10 Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ d'intérieur non vide. Montrer que le $\mathbb{K}$-espace vectoriel $E = \mathcal{F}(I, \mathbb{K})$ est de dimension infinie.

11 Pour $a \in \mathbb{K}$, on considère la famille $\mathcal{F} = (1, (X-a), (X-a)^2, (X-a)^3, \dots, (X-a)^n)$.

1) Montrer que $\mathcal{F}$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$.
2) En déduire une nouvelle démonstration de la formule de Taylor polynomiale.

12 Soit E un $\mathbf{C}$-espace vectoriel de dimension finie. On munit E d'une structure de $\mathbb{R}$-espace vectoriel par restriction à $\mathbb{R}$ de sa loi externe.

1) Montrer que le IR-espace vectoriel ainsi construit est de dimension finie.
2) En désignant par dimc E et dimRE leurs dimensions respectives, montrer que :
$$\dim_{\mathbf{R}} E = 2 \dim \mathbf{C} E.$$

13 Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n, F et G deux sous-espaces vectoriels de E de même dimension p. Le but de cet exercice est de démontrer qu'ils ont un supplémentaire commun dans E..

1) On suppose d'abord que F et G sont supplémentaires. À l'aide d'une base de F et d'une base de G, déterminer un supplémentaire commun à F et G.
2) On revient au cas général. Soit $E' = F + G$.

a) Démontrer qu'il existe des supplémentaires F_1, G_1 de $F \cap G$ dans respectivement F et G.

b) Montrer que F_1 et G_1 sont en somme directe. On pose alors $E_1 = F_1 \oplus G_1$.

c) Montrer qu'il existe H_1 un supplémentaire commun à F_1 et G_1 dans E_1.

d) Montrer que $F + H_1 = F + G$.

e) Montrer que F et H_1 sont en somme directe.

f) Montrer de même que $G \oplus H_1 = F + G$.

g) En déduire l'existence de H, supplémentaire commun à F et G dans E.

14 Soit F et G deux sous-espaces vectoriels d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie $n \in \mathbb{N}$. Montrer que si $\dim(F) + \dim(G) > n$ alors $F \cap G$ contient un vecteur non nul..

15 Dans $\mathbb{R}^4$ on considère les vecteurs :

$$u = (1,0,1,0), v = (0,1,-1,0)$$
$$w = (1,1,1,1), x = (0,0,1,0)$$
$$y = (1,1,0,-1)$$

Soit $F = \text{Vect}(u,v,w)$ et $G = \text{Vect}(x,y)$. Quelles sont les dimensions de $F, G, F+G$ et $F \cap G$?

16 ★ Soit $n \in \mathbb{N}^*$, pour tout $k \in [0,n]$, on pose :

$$P_k = X^k (X-1)^{n-k}$$

Montrer que $(P_k)_{0 \leq k \leq n}$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

17 Soit E l'ensemble des fonctions $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ telles qu'il existe $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \left(ax^2 + bx + c\right) \cos x$$

1) Montrer que E est sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$

2) Déterminer une base de E et sa dimension.

18 Soit $\mathcal{F}_1$ et $\mathcal{F}_2$ deux familles finies d'un IK-espace vectoriel E de dimension finie. En notant $\mathcal{F}$ la famille obtenue en concaténant $\mathcal{F}_1$ et $\mathcal{F}_2$, montrer que :

$$\max(\text{rg}\,\mathcal{F}_1, \text{rg}\,\mathcal{F}_2) \leqslant \text{rg}\,\mathcal{F} \leqslant \text{rg}\,\mathcal{F}_1 + \text{rg}\,\mathcal{F}_2.$$