TD 21 : Espaces vectoriels(1)

Généralités

1 On définit une loi externe $\star$ de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}^2$ par $\lambda \star (x,y) = (x, \lambda y)$. $\left(\mathbb{R}^2, +, \star\right)$ est-il un $\mathbb{R}$-espace

2

1) Dans $\mathbb{R}[X]$, est-ce que $7X^2+2X-4$ est combinaison linéaire de $2X^2-5X+1$ et X^2+X-2 ?
2) Dans $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, est-ce que $x \mapsto \cos^2(x)$ est combinaison linéaire de $x \mapsto 1$ et $x \mapsto \cos(2x)$?
3) Déterminer l'ensemble des $a \in \mathbb{R}$ de sorte que $u=(1,1,2)$ soit combinaison linéaire de $v=(1,1,-1)$ et de $w_a = (0,1,a)$.

Sous espaces vectoriels et supplémentaires

3 Les parties suivantes sont-elles des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^2$?

1) $\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2, x \leqslant y\right\}$
2) $\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2, xy = 0\right\}$
3) $\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2, x = y\right\}$
4) $\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2, x+y = 1\right\}$

4 Soit $E = \mathrm{vect}((2,3,-1),(1,-1,-2))$ et $F = \mathrm{vect}((3,7,0),(5,0,-7))$ dans $\mathbb{R}^s$. Montrer que $E = F$.

5 Les parties suivantes sont-elles des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$?

1) $\left\{(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, (u_n) \text{ bornée }\right\}$
2) $\left\{(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, (u_n) \text{ monotone }\right\}$
3) $\left\{(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, (u_n) \text{ convergente }\right\}$
4) $\left\{(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, (u_n) \text{ arithmétique }\right\}$

6 Les parties de $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ suivantes sont-elles des sous-espaces vectoriels ?

1) $\{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f \text{ est monotone }\}$
2) $\{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f \text{ s'annule en } 0\}$
3) $\{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f \text{ s'annule }\}$
4) $\{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f \text{ est impaire }\}$.

7 Montrer que les parties de $\mathcal{F}([a,b],\mathbb{R})$ suivantes sont des sous-espaces vectoriels :

1) $F = \left\{f \in \mathcal{C}^1([a,b]), f'(a) = f'(b)\right\}$
2) $G = \left\{f \in \mathcal{C}([a,b]), \int_a^b f(t)\mathrm{d}t = 0\right\}$

8 Soient F et G des sous-espaces vectoriels de E. Montrer que :

$$F \cap G = F + G \Leftrightarrow F = G$$

9 ★ Soient $E = \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}), \mathcal{R}$ l'ensemble des fonctions de E croissantes et $\Delta = \left\{f-g, (f,g) \in \mathcal{R}^2\right\}$. Montrer que Δ est un sous-espace vectoriel de E.

10 Montrer que $F = \mathrm{vect}(1,\dots,1)$ et $G = \left\{(x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{K}^n \mid \sum_{k=1}^n x_k = 0\right\}$ sont supplémentaires dans $\mathbb{K}^n$.

11 Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, A et B deux sous-espaces vectoriels de E, et C un supplémentaire de $A \cap B$ dans B. Montrer que $A+B = A \oplus C$.

12 Montrer que $\mathrm{vect}(1,1,0) \oplus \mathrm{vect}((2,1,1),(0,1,1)) = \mathbb{R}^3$.

13 $10\sqrt{0}\star$ Soient :

$$F = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, x+y-z = 0\right\}$$
$$G = \left\{(a-b, a+b, a-3b), (a,b) \in \mathbb{R}^2\right\}$$

1) Montrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$.
2) Déterminer $F \cap G$.

14 ★ Soit $F=\{f\in\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}), f(0)+f(1)=0\}$.

1) Montrer que F est un sous-espace vectoriel.
2) Déterminer un supplémentaire de F dans $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

15 Soient

$$F=\left\{f\in\mathcal{C}^1(\mathbb{R}), f(0)=f'(0)=0\right\}$$
$$G=\left\{x\mapsto ax+b, (a,b)\in\mathbb{R}^2\right\}$$

Montrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires de $\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$.

Familles libres, génératrices, bases

16 Pour tout $a\in\mathbb{R}$, soit $f_a : x\mapsto \exp(ax)$. Démontrer que $(f_a)_{a\in\mathbb{R}}$ est libre dans $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

17 Déterminer si les familles suivantes sont libres :

1) $u_1=(1,2,3,4), u_2=(0,1,2,-1)$ et $u_3=(3,4,5,13)$ (dans $\mathbb{R}^4$) ;
2) $v_1=(1,1,1,1), v_2=(0,1,2,-1), v_3=(1,0,-2,3)$ et $v_4=(2,1,0,-1)$ (dans $\mathbb{R}^4$).
3) $P_1=X^3+4X^2-2X+3, P_2=X^3+6X^2-X+4$ et $P_3=3X^3+8X^2-8X+7$ (dans $\mathbb{R}[X]$) ;
4) $f_1 : x\mapsto\sin(x), f_2 : x\mapsto\sin(2x)$ et $f_3 : x\mapsto\sin(3x)$(dans $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$).

18 Pour $n\geqslant 0$, soit $\mathcal{P}_n=\left(X^n, X^{n-1}(1+X), X^{n-2}(1+X)^2,\dots,(1+X)^n\right)$. Montrer que $\mathcal{P}_n$ est une famille génératrice de $\mathbb{R}_n[X]$ (on remarquera que $(X+1-X)^p=1$)

19

Dans $\mathbb{R}^3$, on considère la famille (u,v,w) où $u=(1,1,1), v=(1,1,2)$ et $w=(1,2,3)$.Montrer que (u,v,w) est une base de $\mathbb{R}^3$. Donner les coordonnées de $(5,7,12)$ dans cette base.

20

Soit $E=\left\{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4 \mid 2x+y-3z+4t=0\right\}$.Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$. Déterminer une base de E.

21 Déterminer une base du sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ défini par :

$$F=\left\{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4 \mid x+y+z+t=0 \text{ et } x-y=0\right\}.$$