Chapitre 2 : Logique et raisonnements

A) Rudiments de logiques :

- Propositions : Définitions et premiers exemples
- Négation : Définition et premières tables de vérité
- Conjonctions et Disjonctions : Définitions et tables de vérités
- Implications et équivalences : Définitions, tables de vérités, Exemples,Conditions nécessaires, suffisantes
- Propriétés/règles de calcul : Idempotence, Associativité, Distributivité, Loi de De Morgan, $P \Rightarrow Q \sim \text{non} P$ ou Q, Négation d'une implication, double implication, contraposition ...

B) Prédicats et quantificateurs :

- Définitions :Prédicats, Quantificateur universel,d'existence, d'existence et d'unicités.
- Négation des quantificateurs, permutation des quantificateurs de même nature, non permutation en général du $\forall$ et du $\exists$.
- Raisonnement avec des quantificateurs

C) Modes de raisonnement :

- Principe de déduction (Modus ponens)
- Disjonction de cas
- Preuve implication/ équivalences
- Preuve par contraposition
- Raisonnement par l'absurde
- Analyse-synthèse : Exemple phare : Toute fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ peut s'écrire de manière unique comme la somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire.
- Récurrence simple :Propriété de bon ordre de $\mathbb{N}$
- Applications : Théorème de récurrence simple,récurrence double, récurrence forte

Chapitre 3 : Inégalités sur $\mathbb{R}$

A) Règles de calculs

- Définitions inégalités
- Manipulation élémentaires (sommes d'inégalités, produits d'inégalités, produit par un réel positif/négatif,inverse,...)
- Encadrement d'inégalités élémentaires.

B)Lien entre fonctions et inégalités

- Application d'une fonction croissant/str croissante/décroissante/str décroissante à une inégalité.
- Fonctions croissantes classiques : $\exp, \ln, x \mapsto x^2, \sin, \sqrt{}, ..$
- Exemples : Résoudre sur $\mathbb{R}_+^*$ l'équation $\ln(2x+1) < \ln(x)+1$).

C) La fonction valeur absolue

- Définition,Interprétation sous forme de distance
- Premières propriétés
- Exemple de résolution d'inégalités avec valeurs absolues en utilisant des disjonctions de cas (Résoudre sur $\mathbb{R}$, $|4x-2| \leq |x-1|$.)
- Valeur absolue du quotient, du produit du carré, de la puissance,...
- Application : a et b positifs, Montrer que $|\sqrt{a}-\sqrt{b}| \leq \sqrt{|a-b|}$.
- Inégalité triangulaire généralisé + cas d'égalité.
- Majoration d'une somme quelconque]

D) La fonction partie entière

- Définition : Soit $x \in \mathbb{R}, \lfloor x \rfloor$ est l'unique entier tel que $\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1$
- Définition partie entière supérieure
- Propriétés de la partie entière :
  Pour $x \in \mathbb{R}$,
  (a) $x-1 < \lfloor x \rfloor \leq x$.

(b) $\lfloor x \rfloor = \lceil x \rceil \Leftrightarrow x \in \mathbb{Z}$.

(c) $\lfloor x \rfloor$ est le plus grand entier n vérifiant $n \leq x$.

(d) La fonction partie entière est croissante.

E) Parties majorées, minorées, minimum et maximum

- Définition parties majorées, parties minorées,partie bornée.

Questions de cours :

- Démonstration par l'absurde que $\sqrt{2}$ est irrationnel.

- Preuve par récurrence forte du fait que tout nombre entier plus grand que 2 admet au moins 1 diviseur premier.

- Prouver que pour tout $(a,b) \in \mathbb{R}^+$, $|\sqrt{a} - \sqrt{b}| \leq \sqrt{|a-b|}$ et résoudre sur $\mathbb{R}$ $|4x-2| \leq |x-1|$.

- Preuve de l'inégalité triangulaire généralisée : Montrer que pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $||x|-|y|| \leq |x+y| \leq |x|+|y|$. et rappeler,sans le montrer, le cas d'égalité de $|x+y|$ et $|x|+|y|$.

- Preuve de propriétés de la fonction partie entière (inférieure) à partir de la définition :
  Soit $x \in \mathbb{R}$,
  (a) Montrer que $x-1 < \lfloor x \rfloor \leq x$.
  (b) Montrer que $\lfloor x \rfloor$ est le plus grand entier n vérifiant $n \leq x$.
  (c) Montrer que la fonction partie entière est croissante.