TD 20 : Analyse asymptotique

Comparaison de fonctions

1 Classer par ordre de négligeabilité les fonctions suivantes au voisinage de 0 puis de $+\infty$:

$$x, x^2, x\ln(x), x(\ln x)^2, \sqrt{x}, \frac{x}{\ln(x)}, e^x$$

2 Déterminer un équivalent simple de ces fonctions au point indiqué :

1) $x \mapsto -4x^5 + 2x^4 - 3x^3 + 12x^2$ en $0, +\infty, -\infty$;
2) $\frac{3x^2-5x}{2x-1}$ en $0, +\infty, -\infty$;
3) $x^2 e^{\frac{1}{x}}$ en $+\infty$ et 0 ;
4) $x \mapsto \frac{\sqrt{\sin(x)}}{e^x-1}$ en 0 ;
5) $x \mapsto \frac{\ln(2x^2+x+1)}{\ln(2x+3)}$ en $+\infty$;
6) $x \mapsto \ln\left(\frac{\ln(x+1)}{\ln(x)}\right)$ en $+\infty$;
7) $x \mapsto x\ln(1+x) - (x+1)\ln(x)$ en $+\infty$;
8) $x \mapsto (x^3+x)^{\frac{1}{3}} - (x^3-x)^{\frac{1}{3}}$ en $+\infty$;
9) $x \mapsto \frac{\ln(x)}{\sqrt{1-x^2}}$ en 1 ;
10) $x \mapsto \frac{\ln(1-x^2)}{1-\ln(x^2)}$ en 0 ;
11) $x \mapsto \tan(x)$ en $\frac{\pi}{2}$;
12) $x \mapsto e^{\frac{1}{x}} - e^{\frac{1}{1+x}}$ en $+\infty$.

3

1) Soit $(f,g) \in \mathcal{F}\left(I, \mathbb{R}_+^*\right)^2$, et soit $a \in \bar{R}$ adhérent à I. On suppose que $f \sim_a g$.
   a) On suppose de plus que $\lim_{x\to a} g(x) = \ell \in \overline{\mathbb{R}}\backslash\{1\}$. Montrer que $\ln f \sim_a \ln g$.
   b) Est-ce encore vrai si $\ell = 1$?
2) a) Soient f et g deux fonctions définies au voisinage d'un réel a ou de $a = \pm\infty$. Montrer que $e^f \sim_a e^g \iff \lim_a (f-g) = 0$.
   b) A-t-on $f \sim_a g \Longrightarrow e^f \sim_a e^g$?

Développements limités

4 (DLs simples). Déterminer le développement limité en 0 de ces fonctions à l'ordre indiqué :

1) $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x}}$, ordre 4 ;
2) $x \mapsto \sqrt{x+2}$, ordre 3 ;
3) $x \mapsto \sqrt{3+\cos(x)}$, ordre 2 ;
4) $x \mapsto x\cos(x) - \sin(x)$, ordre
5) $x \mapsto \sin^2(x)$, ordre 6 ;
6) $x \mapsto \frac{1}{x+2}$, ordre 5 ;
7) $x \mapsto \frac{1}{\cos(x)}$, ordre 4 .

5 (DLs techniques). Déterminer le développement limité en 0 de ces fonctions à l'ordre indiqué :

1) $x \mapsto e^x \frac{\sin(x)}{x}$, ordre 3 ;
2) $x \mapsto (\ln(1+x))^2$, ordre 4 ;
3) $x \mapsto \sqrt{\cos(x)}$, ordre 4 ;
4) $x \mapsto \frac{\cos(x)}{1-x}$, ordre 3 ;
5) $x \mapsto \frac{\cos(x)}{\sqrt{1+x}}$, ordre 2 ;
6) $x \mapsto \sqrt{1+\sqrt{1+x}}$, ordre 2 ;
7) $x \mapsto \sin(\sin(x))$, ordre 5 ;
8) $x \mapsto \frac{1}{e^x+\cos(x)}$, ordre 3 ;
9) $x \mapsto \frac{\sin(x^2)}{1-\cos(x)}$, ordre 4 ;
10) $x \mapsto (1+x^2)^{\frac{1}{x}}$, ordre 3 ;
11) $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, ordre 6 ;
12) $x \mapsto \ln(1+x-\mathrm{Arctan}(x))$,
13) $x \mapsto \frac{x}{e^x-1}$, ordre 3 ;
14) $x \mapsto \mathrm{Arcsin}(x)$, ordre 7 ; ordre 6 ;
15) $x \mapsto \frac{1}{x}\ln(\cos\sqrt{x})$, ordre 2

6 Déterminer le développement limité des fonctions suivantes au point et à l'ordre indiqués :

1) $x \mapsto \frac{1}{x}$, ordre 3 en 1 ;
2) $x \mapsto e^{\sqrt{x}}$, ordre 3 en 1 ;
3) $x \mapsto (e^x - e)\,\mathrm{sh}(x)$, ordre 3 en 1 ;
4) $x \mapsto \ln(1+\sqrt{x})$, ordre 3 en 1 ;
5) $\cos$, ordre 3 en $\frac{\pi}{3}$;
6) $x \mapsto \ln(\sin(x))$, ordre 3 en $\frac{\pi}{3}$;
7) Arctan, ordre 2 en 1.

7 ★ Soit f la fonction définie sur $]-1;1[$ par :

$$\forall x \in]-1;1\left[, f(x) = e^x - a\cos(x) + b\ln(1+x) + \frac{c}{1+x} + d\sqrt{1-x}.\right.$$

Déterminer les réels a, b, c, d de sorte que $f(x) = o(x^n)$ avec n le plus grand possible au voisinage de 0 .

Applications et compléments

8 Déterminer les limites suivantes à l'aide d'un équivalent ou d'un développement limité :

1) $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}-x}{x^2}$;
2) $\lim_{x\to +\infty} \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^x$;
3) $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt[3]{1+x}-1}$;
4) $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x} - \frac{1}{\ln(1+x)}$;
5) $\lim_{x\to 1} \ln(1-x)\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)$;
6) $\lim_{x\to 1} \tan\left(\frac{\pi x}{2}\right)\ln(x)$;
7) $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(\cos(x))}{x^2}$;
8) $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)}{\tan(2x)}$;
9) $\lim_{x\to 0} \frac{(1-\cos(x))\tan(x)}{x\sin^2 x}$;
10) $\lim_{x\to 0} \sin(x)\ln(\ln(\tan(x)))$.

9 Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $f_n(x) = \left(1+x^2\right)^{\frac{1}{n}}$.

1) Déterminer $A \in \mathbb{R}$ tel que : $\forall x \in [0;1], \forall n \in \mathbb{N}^*, \left|f_n(x) - 1 - \frac{1}{n}\ln\left(1+x^2\right)\right| \leqslant \frac{A}{n^2}$.
2) En déduire $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tels que : $\int_0^1 \left(1+x^2\right)^{\frac{1}{n}} dx = a + \frac{b}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$.

10 Déterminer un développement asymptotique à 3 termes des fonctions suivantes en $+\infty$:

1) $x \mapsto \frac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}}$;
2) $x \mapsto \sqrt{\frac{x^3}{x+1}}$;
3) $x \mapsto x(\ln(2x+1) - \ln x)$;
4) $x \mapsto \sqrt{x^2+3x+2} - x$
5) $x \mapsto x^2 e^{\frac{x}{x^2-1}}$;
6) $x \mapsto \sqrt{1-\sqrt{\cos\left(\frac{1}{x}\right)}}$.

11

1) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^2. Déterminer

$$\lim_{x\to 0} \frac{f'(x) - \frac{f(x)-f(0)}{x}}{x}.$$

2) Soit I un intervalle centré en 0 , et soit f et g deux fonctions de classe $\mathcal{C}^3$ sur I, impaires, avec $g^{(3)}(0) \neq 0$. Déterminer :

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} \frac{f(x) - 3f(3x) + 2f(4x)}{g(x) - 3g(3x) + 2g(4x)}$$

12 Si $a \in \mathbb{R}^*$, on considère $f_a(x) = \frac{\ln(1+ax)}{1+x}$. Pour quelles valeurs de a la fonction f_a admet-elle un point d'inflexion en 0 ?

13 Procéder à l'étude locale (existence d'une tangente ou d'une asymptote, position relative de la courbe par rapport à cette tangente ou asymptote) des fonctions suivantes au point indiqué :

1) $x \mapsto \ln\left(1+x+x^2\right)$ au voisinage de 0 ;
2) $x \mapsto \frac{x}{e^x-1}$ au voisinage de 0 ;
3) $x \mapsto x^2 \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{1+x}\right)$ au voisinage de $+\infty$;
4) $x \mapsto 2\sqrt{x} - \sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}$ au voisinage de
5) $x \mapsto \frac{x\ln(x)}{x^2-1}$ au voisinage de 0,1 et $+\infty$. $+\infty$;

14 Procéder à l'étude locale (existence d'une tangente ou d'une asymptote, position relative de la courbe par rapport à cette tangente ou asymptote) des fonctions suivantes au point indiqué :

1) $x \mapsto \ln\left(1+x+x^2\right)$ au voisinage de 0 ;
2) $x \mapsto \frac{x}{e^x-1}$ au voisinage de 0 ;
3) $x \mapsto x^2 \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{1+x}\right)$ au voisinage de $+\infty$;
4) $x \mapsto 2\sqrt{x} - \sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}$ au voisinage de
5) $x \mapsto \frac{x\ln(x)}{x^2-1}$ au voisinage de 0,1 et $+\infty$.

Comparaisons de suites

15 Donner un équivalent simple et comparer les suites suivantes en utilisant la (ou les) bonnes relations :

1) $u_n = n^2 + 3n - 4$ et $v_n = 5(n+3)^2 - 1$;
2) $u_n = (n+1)^3 - (n-1)^3$ et $v_n = (3n+2)(2n-3)$;
3) $u_n = e^{n+3}$ et $v_n = e^{n-2}$;
4) $u_n = e^{3n-2}$ et $v_n = e^{2n-3}$;
5) $u_n = \ln(n+3)$ et $v_n = \ln(n-2)$;
6) $u_n = \ln(3n-2)$ et $v_n = \ln(2n-3)$;
7) $u_n = \sin\left(\frac{1}{n}\right)$ et $v_n = \frac{1}{n}$;
8) $u_n = \left(1 + \frac{a}{n}\right)^n$ et $v_n = e^{an}$.

16 Étudier les limites des suites de terme général suivant à l'aide d'équivalents :

1) $u_n = n \ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$;
2) $w_n = n^n \left((n+1)^{\frac{1}{n}} - n^{\frac{1}{n}}\right)$;
3) $v_n = \frac{n}{\sin \frac{1}{n}} - \frac{n}{\tan \frac{1}{n}}$;
4) $a_n = \frac{\sqrt{n^2+n+1}}{\sqrt[3]{n^2-2n+1}}$
5) $b_n = \frac{n^3 - \sqrt{n^2+1}}{\ln n - 2n^2}$;
6) $c_n = n^{\frac{1}{n}}$.

17 ★ Montrer que

$$\sum_{k=1}^{n} k! \sim_{+\infty} n!.$$