Chapitre 24 : Applications linéaire

A)Généralités

- Définition et premiers exemples classique
- Lien entre application linéaire et morphisme de groupes, conséquences
- Sommé et produit par un scalaire d'applications linéaires
- $\mathcal{L}(E,F)$ est un espace vectoriel.
- Composition d'applications linéaires
- $(\mathcal{L}(E),+,\circ)$ est un anneau (application à la dérivée k-ème d'une fonction de classe C^∞).
- Application linéaire à valeur dans un produit cartésien d'espaces vectoriels (applications composantes linéaires).
- Applications linéaires coordonnées dans une base.
- Isomorphismes, la bijection réciproque d'une application linéaire est une application linéaire.
- Noyau et image d'une application linéaire
- Lien entre injectivité, surjectivité et noyau d'une application linéaire.

B)Endomorphismes particuliers

- Homotéthies, propriétés sur les homotéthies
- Projecteurs et propriétés
- Symétries et propriétés

C) Applications linéaires et familles de vecteurs

- Famille image d'une famille par une application linéaire
- Lien entre être libre/être lié pour la famille $(x_i)_{i\in I}$ et sa famille image par une application linéaire. Cas particulier où l'application est injective.
- Lien entre être générateur pour la famille $(x_i)_{i\in I}$ et sa famille image par une application linéaire. Cas particulier où l'application est surjective.
- Image d'une base par une application linéaire, lien avec injectivité, surjectivité, bijectivité.
- Détermination unique d'une application par l'image d'une base.

D)Applications linéaires et dimension finie

- Injectivité, surjectivité, bijectivité en dimension finie
- Deux espaces vectoriels de dimension finie sont isomorphes si et seulement si ils ont la même dimension.
- Isomorphisme de E vers $K^{dim(E)}$ à l'aide des applications coordonnées dans une base.
- Si $\dim(E)=\dim(F)$ et $f\in\mathcal{L}(E,F)$
  f injective $\Leftrightarrow$ f surjective $\Leftrightarrow$ f bijective.
- Soit $f\in\mathcal{L}(E)$, f bijective $\Leftrightarrow$ f inversible à gauche $\Leftrightarrow$ f inversible à droite.
- Dimension de $\mathcal{L}(E,F)$ lorsque les deux espaces sont de dimension finie.
- Rang d'une application linéaire et propriétés de base sur le rang.
- Théorème du rang

Questions de cours :

- Soit E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, soit $(x_i)_{i\in I}\in E^I$ et soit $f\in\mathcal{L}(E,F)$. On prouvera les propositions suivantes :
  1) Si $(x_i)_{i\in I}$ est liée, alors $(f(x_i))_{i\in I}$ est liée.
  2) Si $(f(x_i))_{i\in I}$ est libre, alors $(x_i)_{i\in I}$ est libre.
  3) Si $(x_i)_{i\in I}$ est libre et f injective, alors $(f(x_i))_{i\in I}$ est libre.
- Soit E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, soit $(x_i)_{i\in I}\in E^I$ et soit $f\in\mathcal{L}(E,F)$. On prouvera les propositions suivantes :
  1) $f\left(\mathrm{vect}\left((x_i)_{i\in I}\right)\right)=\mathrm{vect}\left((f(x_i))_{i\in I}\right)$.
  2) Si $(x_i)_{i\in I}$ est génératrice de E, alors $\mathrm{Im} f=\mathrm{vect}\left((f(x_i))_{i\in I}\right)$.
  3) Si $(x_i)_{i\in I}$ est génératrice de E, alors $(f(x_i))_{i\in I}$ est génératrice si et seulement si f est surjective dans F.
- (Caractérisation des projecteurs). Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, et soit $p\in\mathcal{L}(E)$. On prouvera que les propriétés suivantes sont équivalentes :

1) p est un projecteur ;

2) $E = \operatorname{Ker}(p) \oplus \operatorname{Ker}(p - \mathrm{id}_E)$;

3) $p \circ p = p$ (p est idempotente).

- (Caractérisation des symétries). Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, et soit $s \in \mathcal{L}(E)$. On prouvera que les propriétés suivantes sont équivalentes :

  1) s est une symétrie ;

  2) $E = \operatorname{Ker}(s - \mathrm{id}_E) \oplus \operatorname{Ker}(s + \mathrm{id}_E)$;

  3) $s \circ s = \mathrm{id}_E$ (s est involutive). s est alors la symétrie par rapport à $\operatorname{Ker}(s - \mathrm{id}_E)$ parallèlement à $\operatorname{Ker}(s + \mathrm{id}_E)$, et on a de plus que $s^{-1} = s$.

- On prouvera les deux théorèmes suivants :

  1) Soit E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, et soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. On suppose qu'il existe un supplémentaire S de $\operatorname{Ker} f$ dans E, de sorte que $E = S \oplus \operatorname{Ker} f$. Alors la restriction $f_{/S} : S \to \operatorname{Im} f$ est un isomorphisme.

  2) Soit E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, et soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Si E est de dimension finie, alors :

$$\dim E = \dim \operatorname{Ker} f + \operatorname{rg} f.$$