Chapitre 24 : Applications linéaire

A)Généralités

- Définition et premiers exemples classique
- Lien entre application linéaire et morphisme de groupes, conséquences
- Sommé et produit par un scalaire d'applications linéaires
- $\mathcal{L}(E,F)$ est un espace vectoriel.
- Composition d'applications linéaires
- $(\mathcal{L}(E),+,\circ)$ est un anneau (application à la dérivée k-ème d'une fonction de classe C^{∞}).
- Application linéaire à valeur dans un produit cartésien d'espaces vectoriels (applications composantes linéaires).
- Applications linéaires coordonnées dans une base.
- Isomorphismes, la bijection réciproque d'une application linéaire est une application linéaire.
- Noyau et image d'une application linéaire
- Lien entre injectivité, surjectivité et noyau d'une application linéaire.

B)Endomorphismes particuliers

- Homotéthies, propriétés sur les homotéthies
- Projecteurs et propriétés
- Symétries et propriétés

C) Applications linéaires et familles de vecteurs

- Famille image d'une famille par une application linéaire
- Lien entre être libre/être lié pour la famille $(x_i)_{i\in I}$ et sa famille image par une application linéaire. Cas particulier où l'application est injective.
- Lien entre être générateur pour la famille $(x_i)_{i\in I}$ et sa famille image par une application linéaire. Cas particulier où l'application est surjective.
- Image d'une base par une application linéaire, lien avec injectivité, surjectivité, bijectivité.
- Détermination unique d'une application par l'image d'une base.

D)Applications linéaires et dimension finie

- Injectivité, surjectivité, bijectivité en dimension finie
- Deux espaces vectoriels de dimension finie sont isomorphes si et seulement si ils ont la même dimension.
- Isomorphisme de E vers $K^{dim(E)}$ à l'aide des applications coordonnées dans une base.
- Si $\dim(E)=\dim(F)$ et $f\in\mathcal{L}(E,F)$
  f injective $\Leftrightarrow$ f surjective $\Leftrightarrow$ f bijective.
- Soit $f\in\mathcal{L}(E)$, f bijective $\Leftrightarrow$ f inversible à gauche $\Leftrightarrow$ f inversible à droite.
- Dimension de $\mathcal{L}(E,F)$ lorsque les deux espaces sont de dimension finie.
- Rang d'une application linéaire et propriétés de base sur le rang.
- Théorème du rang

E) Applications linéaires et supplémentaires F) Formes linéaires et hyperplan

Définitions formes linéaires, premiers exemples

Une forme linéaire est surjective ou nulle

Dual et base dual

Définition hyperplan

Si $v\notin H$ hyperplan de E, alors $Vect(v)\oplus H=E$

Un sous espace vectoriel de E est un hyperplan de E si et seulement si il admet une droite vectorielle comme supplémentaire.

Dimension d'un hyperplan et équation d'un hyperplan en dimension finie.

Intersection d'hyperplans

Chapitre 25 : Matrices et applications linéaires

A) Matrices de vecteurs et applications linéaires

- Matrice d'un vecteur dans une base
- Matrice d'une application linéaire dans un couple de bases
- Isomorphisme naturel entre $\mathcal{L}(E,F)$ et $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ pour $p=\dim(E)$ et $n=\dim(F)$ pour un choix de bases.
- Isomorphisme naturel (d'anneau et espaces vectoriels) entre $\mathcal{L}(E)$ et $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$
- Coordonnées de l'image d'un vecteur par une application linéaire

Questions de cours :

- Soit H un sous-espace vectoriel de E, montrez que ;
  H hyperplan de $E \iff$ Il existe $v \in E\backslash H$, $E = Vect(v) \oplus H$.
- Soit E un espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$, et $p \leq n$, on prouvera les résultats suivants :
  a) Un hyperplan de E est de dimension $n-1$ (Note : on ne prouvera bien que ce sens de l'implication).
  b) L'intersection de p hyperplans de E est de dimension supérieure à $n-p$
  c) Si $F \subset E$ est de dimension $n-p$ alors F est l'intersection de p hyperplans de E.
- a) Soit E et F 2 $\mathbb{K}$ espace vectoriel de dimension finie n et p et B_E, B_F, leur base respective on montrera que Φ : $L(E,F) \to M_{n,p}(\mathbb{K}), u \mapsto Mat_{B_E,B_F}(u)$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels.
  b) Donner la matrice d'une application linéaire choisie par le colleur.