Chapitre 25 : Matrices et applications linéaires

A) Matrices de vecteurs et applications linéaires

- Matrice d'un vecteur dans une base
- Matrice d'une application linéaire dans un couple de bases
- Isomorphisme naturel entre $\mathcal{L}(E,F)$ et $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ pour $p = \dim(E)$ et $n = \dim(F)$ pour un choix de bases.
- Isomorphisme naturel (d'anneau et espaces vectoriels) entre $\mathcal{L}(E)$ et $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$
- Coordonnées de l'image d'un vecteur par une application linéaire
- Composée d'applications linéaires, lien avec les matrices inversibles.

B) Application linéaire canoniquement associé à une matrice

- Application canoniquement associée à une matrice
- Noyau, image et rang
- Multiples conditions d'inversibilité d'une matrice, par son rang, par l'espace engendré par ses colonnes, par son noyau.
- L'inversibilité à gauche ou l'inversibilité à droite est équivalente à l'inversibilité d'une matrice
- Conservation du rang parmultiplication par une matrice inversible. Conservation du noyau par multiplication à gauche par une matrice inversible. Conservation de l'image par multiplication à droite par une matrice inversible.
- Lien avec les systèmes linéaires.

C) Changement de base

- Matrices de passages, inversibilité des matrices de passage
- Formules de changement de base pour les vecteurs, applications linéaires et enedomorphismes

D) Matrices équivalentes, rang, matrices semblables

- Définition de matrices équivalentes
- Relation d'équivalence
- Lien entré équivalence et applications linéaires écrites dans deux bases différentes.
- Une matrice est de rang r si et seulement si elle est équivalente à la matrice J_r (qui a uniquement ses r premiers coefficients diagonaux qui sont non nuls et égaux à 1.
- Invariance du rang par la transposée.
- Le rang d'une matrice carré est également donné par le rang de la famille de ses vecteurs lignes.
- Matrices extraites, caractérisation du rang par matrices extraites.
- Matrices semblables
- Relation d'équivalence
- Lien entre matrices semblables et endomorphismes exprimés dans deux bases différentes.

D) Trace

- Trace d'une matrice
- Linéarité de la trace
- Trace d'une transposée, commutativité à l'intérieur de la trace
- Trace de matrices semblables (invariant de similitude)
- Trace d'une endomorphisme
- Linéarité de la trace
- Trace d'une composée d'endomorphismes.

Questions de cours :

- Soit $M \in_n (\mathbb{K})$, on montrera les équivalences suivantes :

$$M \text{inversible}$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\forall X \in \mathbb{K}^n, MX = 0 \Rightarrow X = 0$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\text{Les colonnes de } M \text{ forment une famille libre}$$

$$\Leftrightarrow$$
$$\mathrm{rg}(M) = n$$
$$\Leftrightarrow$$
$$M \text{ est inversible à droite .}$$

- Preuve de la formule de changement de base pour des vecteurs,pour des applications linéaires puis plus spécifiquement, pour des endomorphismes.
- On rappellera explicitement la formule de changement de base pour des applications linéaires ainsi que la définition de la matrice de passage d'une base B vers une base $B^{']}$ puis on prouvera le résultat suivant :

  Soit E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie non réduits à $\{0\}$. On note $p = \dim E \geqslant 1$ et $n = \dim F \geqslant 1$. Soit $(A, B) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})^2$. A et B sont équivalentes si et seulement si il existe deux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ de E, deux bases $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ de F, et une application linéaire $u \in \mathcal{L}(E, F)$ telles que :

  $$A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(u) \quad \text{et} \quad B = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{C}'}(u).$$

- Deux matrices de $M_{n,p}(\mathbb{K})$ sont équivalentes si et seulement si elles sont de même rang