

Chapitre 26 : Groupe symétrique

- Structure de groupe
- Cardinal du groupe (non prouvé)
- Transpositions
- Commutations
- Ordre d'une permutation
- Points fixes et support
- Orbites
- Définition cycles et premières propriétés
- Décomposition en produit de cycles à support disjoints
- Décomposition en produit de transpositions
- Application au calcul de l'ordre d'une permutation
- Signature d'une permutation.

Chapitre 27 : Déterminants

A) Application n-linéaires

- Définitions, premières propriétés
- Formes n-linéaires
- Formes symétriques, alternées, anti-symétriques
- Propriétés en lien avec les permutations
- Espace vectoriel des formes symétriques et anti-symétriques
- En dimension finie, dans un espace de dimension inférieur ou égale à p .

B) Déterminant d'une famille de vecteurs

- Définitions (existence et unicité admise)
- Formules de changement de base
- Lien entre être une abse et être de déterminant nul

C) Déterminant d'un endomorphisme

- Définition (déterminant de l'image d'une base dans cette base) et preuve que la définition ne dépend pas de la base.
- Formules de changement de base
- Lien entre être une base et être de déterminant nul
- Propriétés de calcul
- Déterminant d'une composée, de l'inverse

D) Déterminant d'une matrice carrée

- Définition
- Lien avec les déterminants de vecteurs et les déterminants d'endomorphisme
- Lien avec l'inversibilité de la matrice
- Propriétés de calculs
- Déterminant d'une transposée
- Lien avec colonnes et lignes

E) Méthodes de calcul

- Déterminants en petite dimension
- Propriétés basique du déterminant
- Matrices triangulaires/diagonales
- Pivot de Gauss
- Mineurs, cofacteurs, et développement par rapport à ligne/colonne
- Déterminant de Vandermonde
- La comatrice n'a pas encore été traitée**

Questions de cours :

- On prouvera les propriétés suivantes. Soit $n \geq 1$ et soit $\sigma \in \mathfrak{S}_n$.
 - 1) $\text{Supp}(\sigma^{-1}) = \text{Supp}(\sigma)$ et $\text{Fix}(\sigma^{-1}) = \text{Fix}(\sigma)$.
 - 2) $\text{Supp}(\sigma)$ et $\text{Fix}(\sigma)$ sont σ -invariants : on a que $\sigma(\text{Supp}(\sigma)) = \text{Supp}(\sigma)$ et $\sigma(\text{Fix}(\sigma)) = \text{Fix}(\sigma)$.
 - 3) Soit $n \geq 1$ et soit $(\sigma_1, \sigma_2) \in \mathfrak{S}_n^2$. Si les supports de σ_1 et σ_2 sont disjoints (i.e. si $\text{Supp}(\sigma_1) \cap \text{Supp}(\sigma_2) = \emptyset$) alors σ_1 et σ_2 commutent.
- On prouvera les propriétés suivantes : Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel, et soit $f \in \mathcal{L}_p(E, \mathbb{K})$.
 - 1) f est antisymétrique si et seulement si :

$$\forall (x_1, \dots, x_p) \in E^p, \forall \sigma \in \mathfrak{S}_p, f(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(p)}) = \varepsilon(\sigma) f(x_1, \dots, x_p)$$

- 2) f est antisymétrique si et seulement si elle est alternée.
- On prouvera les résultats suivants :
 - 1) Preuve de la formule de changement de base pour le déterminant
 - 2) Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$, et soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Si $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ et $\mathcal{B}' = (e'_1, \dots, e'_n)$ sont deux bases de E , alors

$$\det_{\mathcal{B}}(u(e_1), \dots, u(e_n)) = \det_{\mathcal{B}'}(u(e'_1), \dots, u(e'_n)).$$

- Preuve que pour $A \in M_n(\mathbb{K})$, $\det(A) = \det(A^t)$ puis calcul du déterminant d'une matrice par la méthode du pivot de Gauss.
- Calcul du déterminant de Vandermonde