TD 28 : Probabilités sur un univers fini, Variables aléatoires

Vocabulaire des probabilités/espaces probabilisés

1 Soit Ω un univers et soient A, B, C trois événements de Ω. Traduire en termes ensemblistes (en utilisant uniquement les symboles d'union, d'intersection et de passage au complémentaire, ainsi que A, B et C) les événements suivants :

1) Seul A se réalise ;
2) A et B se réalisent, mais pas C.
3) les trois événements se réalisent ;
4) au moins l'un des trois événements se réalise ;
5) au moins deux des trois événements se réalisent ;
6) aucun ne se réalise ;
7) au plus l'un des trois se réalise ;
8) exactement deux des trois se réalisent ;

2 Soient $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé, et $A_1, \ldots, A_n$ des événements. Démontrer que

$$\mathbb{P}(A_1 \cap \cdots \cap A_n) \geq \left(\sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i)\right) - (n-1).$$

3 Un tiroir contient 12 paires de chaussettes toutes différentes. On prend 4 chaussettes. Quelle est la probabilité d'obtenir :

1) deux paires complètes ?
2) au moins une paire ?
3) une paire et une seule ?

4 (Par Arthur Léonce) ★ On appelle dérangement toute permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ sans point fixe on note $\mathfrak{D}_n$ leur ensemble et $D_n = |\mathfrak{D}_n|$

Montrer que :

$$n! = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} D_k$$

Soit $X_n : \Omega \to \mathfrak{S}_n$ une variable aléatoire telle que $X_n \sim U(\mathfrak{S}_n)$. Determiner $\mathbb{P}(X_n \in \mathfrak{D}_n)$ et calculer si elle existe sa limite On pourra utliser librement :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

et la formule d'inversion

$$u_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} v_k \Longrightarrow v_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} u_k$$

5

1) On lance un dé à six faces, truqué. On suppose que la probabilité d'obtenir $k \in [1, 6]$ est proportionnelle à k. Déterminer la probabilité d'obtenir un nombre pair.
2) Soit $n \geq 1$. Déterminer une probabilité sur $\{1, \ldots, n\}$ telle que la probabilité de $\{1, \ldots, k\}$ soit proportionnelle à k^2.

6 (Par Arthur Léonce) Soit Ω un univers fini et A, B deux évenements. Montrer que

$$\sup(0, \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - 1) \leq \mathbb{P}(A \cap B) \leq \inf(\mathbb{P}(A), \mathbb{P}(B))$$

7 (Par Arthur Leonce) On rappelle la formule :

$$\binom{2n}{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2$$

M. Masanet et M.Marinutti jouent au foot. Ils décident de faire un jeu. Ils vont se tirer indéfiniment, tour à tour des tirs au buts. A chaque tir on suppose que la probabilité de marquer est de p.

3) On note S_n l'évenement { le premier tir réussi de M. Masanet est le n-ieme }. Déterminer $\mathbb{P}(S_n)$

4) On note M_n l'évenement { M. Masanet et M. Marinutti ont autant de tirs encaissés que de tirs réussis au bout de n tirs } Déterminer $\mathbb{P}(M_n)$ ainsi que sa limite.

8 (Par Arthur Léonce)

1) Montrer que pour $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\binom{2n}{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2$$

On pourra, au choix calculer de deux manières différentes $(1+X)^{2n} \in \mathbb{R}[X]$ ou considérer l'application :

$$\begin{aligned} f : \mathcal{P}_n(\{1,\ldots,2n\}) &\to \mathcal{P}(\{1,\ldots,n\}) \\ A &\mapsto A \cap \{1,\ldots n\} \end{aligned}$$

et on justifiera que :

$$\mathcal{P}_n(\{1,\ldots,2n\}) = \coprod_{k=0}^{n} \coprod_{|A|=k} f^{-1}(A)$$

2) M. Masanet effectue une marche aléatoire sur $\mathbb{Z}$(i.e. il se déplace d'1 pas vers la droite ou la gauche à chaque instant et sa position est marquée par les entiers. En commençant en 0 M. Masanet peut donc se déplacer vers 1 ou -1. Il doit faire n sauts et à chaque saut il a une probabilité de $\frac{1}{2}$ de faire un saut vers la droite. Décrire Ω et donner son cardinal

3) On note A_n l'évenement {M. Masanet est revenu en 0 au bouts des n sauts }. Calculer $\mathbb{P}(A_n)$

4) ★ Calculer en prouvant son existance $\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(A_n)$. On pourra utliser la formule de Stirling.

9 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On choisit au hasard une permutation dans S_n. Déterminer la probabilité que 1 soit un point fixe.

10 (Paradoxe des anniversaires) En considérant qu'une année fait 365 jours, quelle est la probabilité que r personnes aient leur anniversaire à des dates deux à deux distinctes ?

11 On dispose 8 tours sur un échiquier. Quelle est la probabilité qu'aucune tour ne puisse en capturer une autre ?

12 D'un jeu de 52 cartes, 5 cartes sont distribuées à un joueur.

1) Quelle est la probabilité que ce joueur ait en main exactement trois cartes de carreau ?

2) Quelle est la probabilité que ce joueur ait en main au moins une paire, c'est-à-dire deux cartes de même valeur ?

Variables aléatoires

13 Soit n et N deux entiers naturels non nuls tels que $n \leqslant N$. Un joueur prélève n boules simultanément dans une urne contenant N boules numérotées de 1 à N. On considère les variables aléatoires réelles X et Y égales respectivement au plus grand et au plus petit numéro des n boules prélevées. Déterminer les lois de X et de Y.

14 Soit $(n,N) \in (\mathbb{N}^*)^2$. Un joueur prélève n boules successivement avec remise dans une urne contenant N boules numérotées de 1 à N ; on considère la variable X (resp. Y) égale au plus grand numéro (resp. plus petit) des n boules tirées.

1) Donner un espace probabilisé $(\Omega, \mathbb{P})$ rendant compte de l'expérience. Déterminer $X(\Omega)$ et $Y(\Omega)$.

2) Déterminer $\mathbb{P}(X \leqslant k)$ pour $k \in [\![1,N]\!]$. En déduire la loi de X.

3) Déterminer $\mathbb{P}(Y \geqslant k)$ pour $k \in [\![1,N]\!]$. En déduire la loi de Y.

15 Soit X une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $[0, 10]$. Déterminer les lois de $Y = \lfloor \sqrt{X} \rfloor$ et $Z = \cos \frac{X\pi}{2}$.

16 Montrer que, si la variable aléatoire X suit la loi binomiale de paramètre (n, p), la variable aléatoire $n - X$ suit la loi binomiale de paramètre $(n, 1-p)$. Interpréter.

17 Soit n et N des entiers tels que $1 \leqslant n < N$. Une urne contient N boules numérotées de 1 à N. On en tire n simultanément. Les numéros obtenus sont notés $Y_1 < \cdots < Y_n$. Déterminer la loi du n-uplet $(Y_1, \ldots, Y_n)$, puis les lois marginales.

18 Dans une pile de $n(n \geqslant 2)$ lettres, se trouvent les deux lettres que l'on doit envoyer. On enlève une par une les lettres qui sont sur le dessus. On note X_1 la variable aléatoire donnant le nombre de lettres enlevées jusqu'à trouver une des deux lettres à envoyer sur le dessus de la pile. On met de côté la lettre trouvée et l'on recommence l'opération jusqu'à trouver la deuxième lettre et on note X_2 la variable aléatoire donnant le nombre supplémentaire de lettres qu'il a fallu retirer de la pile avant que la deuxième lettre ne soit sur le dessus de la pile. Sans information supplémentaire, on peut supposer que toutes les positions possibles pour les deux lettres sont équiprobables.

1) Décrire l'ensemble Ω des résultats possibles pour cette expérience aléatoire et la probabilité $\mathbb{P}$ mise sur Ω. Déterminer la loi du couple (X_1, X_2) puis la loi de X_1 et de X_2.
2) On note $Z = X_1 + X_2 + 2$. Que représente la variable aléatoire Z ? Déterminer sa loi.

19 Soit $\Omega = [\![1;4]\!]$ et P l'unique probabilité sur Ω telle que $P(\{1\}) = \frac{1}{3}, P(\{2\}) = \frac{1}{6}, P(\{3\}) = \frac{1}{3}$, $P(\{4\}) = \frac{1}{6}$. Soit X une variable aléatoire réelle sur Ω. Quels sont les p possibles pour que X suive la loi $\mathcal{B}(p)$?

20 (CCINP 95). Une urne contient deux boules blanches et huit boules noires.

5) Un joueur tire successivement, avec remise, cinq boules dans cette urne. Pour chaque boule blanche tirée, il gagne 2 points, et pour chaque boule noire tirée il perd 3 points. On note X la variable aléatoire représentant le nombre de boules blanches tirées, et Y le nombre de points obtenus par le joueur sur une partie.
   a) Déterminer la loi de X.
   b) Déterminer la loi de Y.
6) Dans cette question, on suppose que les cinq tirages successifs se font sans remise.
   a) Déterminer la loi de X.
   b) Déterminer la loi de Y.

Conditionnement

21 Une urne contient initialement $r \geqslant 1$ boules rouges et $b \geqslant 1$ boules blanches. On effectue des tirages successifs d'une boule, en remettant après chaque tirage la boule tirée dans l'urne avec en plus $c \geqslant 1$ boules de la même couleur. Pour tout $n \geqslant 1$, on note R_n l'événement * la n-ième boule tirée est rouge w.

1) On note $p_n(r, b)$ la probabilité d'obtenir une boule rouge au n-ième tirage, quand l'urne contient initialement r boules rouges et b boules blanches. Montrer que :
$$\forall n \geqslant 2 \quad p_n(r, b) = \frac{r}{r+b} p_{n-1}(r+c, b) + \frac{b}{r+b} p_{n-1}(r, b+c).$$
2) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $\mathbb{P}(R_n) = \frac{r}{r+b}$.

22 (CCINP 107). On dispose de deux urnes U_1 et U_2. L'urne U_1 contient 2 boules blanches et 3 boules noires. L'urne U_2 contient 4 boules blanches et 3 boules noires. On effectue des tirages successifs dans les conditions suivantes : on choisit une urne au hasard et on tire une boule dans l'urne choisie. On note sa couleur et on la remet dans l'urne d'où elle provient. Si la boule tirée était blanche, le tirage suivant se fait dans l'urne U_1, sinon dans l'urne U_2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note B_n l'évènement "la boule tirée au n-ième tirage est blanche", et on pose $p_n = p(B_n)$.

1) Calculer p_1.

2) Prouver que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, p_{n+1} = -\frac{6}{35}p_n + \frac{4}{7}$.

3) En déduire, pour tout entier naturel n non nul, la valeur de p_n. Quelle est la limite de la suite $(p_n)_{n\geqslant 1}$?

23 (CC INP 105) Dans une zone désertique, un animal erre entre trois points d'eau A, B et C. Au premier jour de la saison sèche, il se trouve au point A. Lorsqu'il a épuisé l'eau du point où il se trouve, il part avec équiprobabilité rejoindre l'un des deux autres points d'eau, qu'il atteint en une journée. L'eau du point qu'il vient de quitter se régénère alors. On suppose que la saison sèche dure $N+1$ journées.

Soit $n \in \mathbb{N}$. On note A_n, (resp. B_n, C_n) les évènements 'l'animal est en A (resp. B, C) après son n-ième trajet", ainsi que $a_n = P(A_n), b_n = P(B_n)$ et $c_n = P(C_n)$.

1) Décrire l'univers modélisant ce comportement aléatoire.

2) Exprimer $a_{n+1}, b_{n+1}, c_{n+1}$ en fonction de a_n, b_n, c_n.

On considère la matrice $A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

3) Démontrer que $\mathbb{R}^3 = \mathrm{Ker}\left(A + \frac{1}{2}I_3\right) \oplus \mathrm{Ker}(A - I_3)$.

4) En déduire qu'il existe une matrice $P \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ et une matrice D diagonale telles que $D = P^{-1}AP$.

5) Donner une expression de a_n, b_n, c_n en fonction de n.

24 On considère une famille de deux enfants. On suppose que chaque enfant a une chance sur deux d'être une fille. Quelle est la probabilité que les deux enfants soient des filles sachant que l'aîné est une fille ? Quelle est la probabilité que les deux enfants soient des filles sachant qu'il y a au moins une fille ?

25 (Par Arthur Léonce)

Des personnes $1, 2, 3, \ldots$ se transmettent dans cet ordre une information. Chaque personne trans met à la suivante l'information qu'il a reçu avec probabilité p et son contraire avec probabilité $1-p$. On note C_n l'évenement {la n-ème recoit l'information correcte }.

1) Déterminer $p_n = \mathbb{P}(C_n)$

2) Calculer $\lim_{n\to+\infty} p_n$

26 (Paradoxe de Monty-Hall) Lors d'un jeu télévisé, un candidat fait face à trois portes. Un cadeau est caché derrière l'une de ces portes, les deux autres sont perdantes. Le présentateur sait derrière quelle porte est caché le cadeau, et propose au candidat de choisir une porte à ouvrir. Après que le candidat a fait son choix, le présentateur ouvre l'une des portes perdantes que le candidat n'a pas choisi, et lui propose alors de : soit revenir sur son choix et de changer de porte, soit de ne rien changer. Il ouvre alors la porte choisie et dévoile au candidat s'il a gagné le cadeau. Quelle stratégie doit suivre le candidat pour maximiser ses chances de gain ?.

27 Soit n un entier naturel non nul, p et p' des réels appartenant à $]0,1[$. On considère deux variables aléatoires X et Y à valeurs dans $[\![0,n]\!]$. On suppose que X suit la loi $\mathcal{B}(n,p)$ et que, pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, la loi de Y conditionnelle à $\{X=k\}$ est $\mathcal{B}\left(k,p'\right)$.

1) Déterminer la loi du couple (X,Y).

2) Déterminer la loi de Y.

28 Soit n dans $\mathbb{N}^*, Z$ et X deux variables aléatoires à valeurs dans $[\![0,n]\!]$. On suppose que, pour tout entier $k \in [\![0,n]\!]$ la loi de X conditionnelle à $\{Z = k\}$ est la loi uniforme sur $[\![0,k]\!]$.

1) Déterminer la loi du couple (Z,X), puis la loi de X.

2) Comparer les lois de X et de $Z-X$.

29 Un secrétaire effectue n appels téléphoniques vers n personnes distinctes ($n \geqslant 2$). Pour chaque appel, la probabilité d'obtenir le correspondant demandé est $p \in]0,1[$. On note X la variable aléatoire égale au nombre de correspondants obtenus.

1) Quelle est la loi de X ?

2) Après ses n recherches, le secrétaire appelle une deuxième fois, et dans les mêmes conditions, chacun des $n-k$ correspondants qu'il n'a pas réussi à joindre la première fois. Soit Y le nombre de correspondants obtenus dans la deuxième série d'appels et $Z = X+Y$, le nombre total de correspondants obtenus.

a) Déterminer la loi conditionnelle de Y sachant $\{X = k\}$, pour tout $k \in [\![0,n]\!]$. En déduire la loi conjointe de X et Y.

b) Montrer que Z suit une loi binomiale que l'on précisera.

Indépendance

30 Une urne contient 20 boules blanches et 20 boules noires. On y effectue $n(n \geqslant 2)$ tirages successifs avec remise. On note A l'événement « au cours des tirages, on a obtenu des boules de chacune des couleurs y et B l'événement & au cours des tirages, on a obtenu au plus une boule blanche \$. Étudier l'indépendance des événements A et B.

31 Peut-on truquer un dé à 6 faces pour que la variable aléatoire qui donne la somme des nombres obtenus lors de 2 lancers indépendants suive une loi uniforme ?

32 Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes sur $(\Omega, \mathbb{P})$, suivant la loi uniforme sur $\llbracket 1, n \rrbracket$. Déterminer la loi de $X+Y$.

33 Soit $(X_1, \ldots, X_n)$ un n-uplet de variables aléatoires indépendantes et de même loi à valeurs dans E et x un élément de E. On note N_I la variable aléatoire égale au nombre de variables X_k égales à x, c'est-à-dire définie par :

$$\forall \omega \in \Omega \quad N_x(\omega) = \operatorname{card}\left(\left\{k \in \llbracket 1, n \rrbracket : X_k(\omega) = x\right\}\right).$$

Déterminer la loi de N_x.

34 Soit $n \geqslant 2$. On choisit au hasard un entier compris entre 1 et n. Pour $p \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on note A_p l'événement : *le nombre choisi est divisible par p.

1) Calculer $\mathbb{P}\left(A_p\right)$ pour tout $p \in [1, n]$ diviseur de n.
2) Montrer que si $p_1, \ldots, p_r$ sont les diviseurs premiers distincts de n, alors les événements $A_{p_1}, \ldots, A_{p_r}$ sont mutuellement indépendants.
3) On désigne par φ la fonction indicatrice d'Euler :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \varphi(n) = \operatorname{card}(\{k \in \llbracket 1, n \rrbracket : k \wedge n = 1\}).$$

En déduire que $\frac{\varphi(n)}{n} = \prod_{i=1}^{\tau}\left(1 - \frac{1}{p_i}\right)$.

35 Votre voisine a deux enfants dont vous ignorez le sexe. On considère les trois événement suivants

1) $A=$ "les deux enfants sont de sexes différents"
2) $B=$ "l'ainé est une fille"
3) $C=$ "le cadet est un garçon".

Montrer que A, B et C sont deux à deux indépendants, mais ne sont pas mutuellement indépendants. On suppose que la probabilité à la naissance d'avoir une fille (respectivement un garçon) est égale à $1/2$.

36 Soient $A_1, \ldots, A_n n$ événements d'un espace probabilisé (Ω, P). On les suppose mutuellement indépendants et de probabilités respectives $p_i = P(A_i)$. Donner une expression simple de $P(A_1 \cup \ldots \cup A_n)$ en fonction de $p_1, \ldots, p_n$. Application : on suppose qu'une personne est soumise à n expériences indépendantes les unes des autres et qu'à chaque expérience, elle ait une probabilité p d'avoir un accident. Quelle est la probabilité qu'elle ait au moins un accident ?

37 Un livre contient 4 erreurs, numérotées de 1 à 4 , et est relu par une suite de relecteurs pour correction. A chaque relecture, chaque erreur est corrigée avec une probabilité $1/3$. Les erreurs sont corrigées de manière indépendante les unes des autres, et les relectures sont indépendantes les unes des autres.

1) Quelle est la probabilité que l'erreur numéro 1 ne soit pas corrigée à l'issue de la n-ième lecture ?
2) Quelle est la probabilité que le livre soit entièrement corrigé à l'issue de la n-ième lecture ? Combien faut-il de relectures pour que cette probabilité soit supérieure à 0.9 ?

38 Deux joueurs A et B s'affrontent autour d'un jeu. A joue la première partie, B joue la deuxième, A joue la troisième, et ainsi de suite. Les deux joueurs jouent $2n$ parties, et le premier qui gagne une partie a gagné l'ensemble du jeu. On suppose que A a une probabilité $a \in]0,1[$ de gagner une partie donnée, B une probabilité $b \in]0,1[$, et que les parties sont indépendantes les unes des autres.

1) Quelle est la probabilité que ni A ni B ne gagne ?

2) Quelle est la probabilité que A gagne ? que B gagne ?

3) A quelle condition le jeu est-il équilibré ?

Exemple 1