Chapitre 29 : Probabilités sur un univers fini,Variables aléatoires

A) Vocabulaire de base des probabilités

- Univers, évènements
- Evènements élémentaires, incompatibles, certains,impossible
- Système complet d'évènements[2]
- Variables aléatoires sur un univers fini
- Exemples classiques

B) Espaces probabilisés

- Définition probabilité, espace probabilisé
- Premières propriétés
- Additivité fini, somme des probabilités d'un système complet d'évènements.
- Distribution de probabilités, Déterminantion d'une probabilité par les évènements élémentaires
- Exemple fondamental : La probabilité uniforme

C) Loi d'une variablé aléatoire

- Définition
- Lien avec les évènements élémentaires
- Variables aléatoires de mêmes lois (maintenu par la composition)
- Lois usuelles : uniforme, Bernouilli, binomiale

C) Couples de variables aléatoires

- Définition
- Exemples classiques
- Loi conjointe, loi marginale
- Généralisation aux n-uplets/vecteurs aléatoires.

D) Conditionnement

- Probabilité conditonnelle, premières propriétés
- Formule des probabilités composées,totale, de Bayes
- Loi d'une Variable aléatoire conditionnée par un évènement.

E) Indépendance

- Evenements indépendants, lien avec la probabilité conditionnelle, indépendance des évènements contraires
- indépendance famille d'évènements
- Variables aléatoires indépendantes
- Indépendance via les évènements élémentaires,via les lois conditionelles
- Fonctions de variables indépendantes
- Indépendance de n variables aléatoires, différence avec indépendant 2 à 2.
- Fonctions de variables indépedantes
- Lemme des coalitions
- Sommes de variables aléatoires de Bernouilli

Chapitre 30 : Espérance et variance

A) Espérance

- Lois usuelles

Questions de cours :

- **1**) Prouver la formule des probabilités totales et la formule de Bayes.

2) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On dispose de n urnes $U_1, \cdots, U_n$ tels que pour $i \in [\![1, n]\!]$, l'urne U_i contient i boules blanches et $n-i$ boules noires.
On tire aléatoirement un numéro i entre 1 et n On tire ensuite une boule aléatoirement dans l'urne U_i.
Quelle est la probabilité de tirer une boule blanche ?

3) Une certaine maladie affecte une personne sur dix mille. On dispose d'un test sanguin qui détecte cette maladie avec une fiabilité de 99% lorsque cette maladie est effectivement présente. Cependant, on obtient un résultat faussement positif pour $0,1\%$ des personnes saines testées. Calculer la probabilité qu'une personne soit réellement malade Iorsqu'elle a un test positif.

- On prouvera les propriétés suivantes :

  1) Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes sur $(\Omega, \mathbb{P})$. Alors, pour toutes fonctions f définie sur $X(\Omega)$ et g définie sur $Y(\Omega)$, on a $f(X)$ indépendant de $g(Y)$.

  2) Soit $(X_1, \ldots, X_n)$ un n-uplet de variables aléatoires sur $(\Omega, \mathbb{P})$, mutuellement indépendantes, et $1 \leqslant p < n$. Si f et g sont des fonctions de p variables et $n-p$ variables respectivement telles que $f\left(X_1, \ldots, X_p\right)$ et $g\left(X_{p+1}, \ldots, X_n\right)$ soient définies, alors $f\left(X_1, \ldots, X_p\right)$ et $g\left(X_{p+1}, \ldots, X_n\right)$ sont indépendantes

- **1)** Prouver que : soit (X, Y) un couple de variables aléatoires sur $(\Omega, \mathbb{P})$. On a alors :

$$\forall x \in X(\Omega) \quad \mathbb{P}(X = x) = \sum_{y \in Y(\Omega)} \mathbb{P}(\{X = x\} \cap \{Y = y\}).$$

  2) On lance deux dés équilibrés succesivement : X est la variable aléatoire égale au plus petit des nombres apparus et Y est la variable aléatoire égale au plus grand des nombres apparus. Déterminer la loi conjointe du couple (X, Y) ainsi que les lois marginales.