Programme de colle n°1

Chapitre 1 : Sommes et produits

A) Prélude aux ensembles :

- Définition principale, Exemples
- Produit Cartésien, définition, exemples
- Familles d'éléments d'un ensemble

B) Sommes simples

- Définitions générales
- Exemples généraux/fondamentaux : $\sum_{k=1}^{n} k, \sum_{k=1}^{n} k^2$ (Preuve par récurrence), $\sum_{k=0}^{n} x^k$ où $x \in \mathbb{K}$
- Premières propriétés : Chasles, Linéarité.
- Exemples d'utilisation de Chasles+Linéarité : $\sum_{k=1}^{n} \min(k, n)$ (Chasles), $\sum_{k=1}^{n} n(k+1)^2$ (Linéarité)
- Focus sur la parité : relation de Chasles pair/impair (Calcul de $\sum_{k=0}^{2n}(-1)^k k^2$).
- Changement d'indice : décalage, renversement, principe et méthode, Application à $\sum_{k=1}^{n} k$ (cf Gauss)
- Application au télescopage (Preuve intuitive+ Preuve du télescopage par changement d'indice).
- Application du télescopage : Formule de factorisation de $a^n - b^n$ pour $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et $n \in \mathbb{N}$.
- Astuce : Ajouter 0, Multiplier par 1 (technique du +1-1)

C) Sommes doubles :

- Sommes rectangulaires, sommes triangulaires
- Exemples classiques : $\sum_{1 \leq i,j \leq n} i + j, \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} \frac{i}{j}$
- Produit de sommes finies

D) Produits et factorielles :

- Définition,Propriétés de base ($\prod_{i=1}^{n} \lambda a_i, \prod_{i=1}^{n} a_i b_i$, relation de Chasles, produit vide...)
- Définition+Propriété factorielle.
- Télescopage
- Utilisation du logarithme pour transformer un produit en somme.

E) Coefficients binomiaux :

- Définition, $k < 0, k > n$
- Premières propriétés : premiers termes, formule de symétrie, formule de factorisation(non prouvée)
- Additivité/formule de Pascal (preuve en détail avec les différents cas selon la valeur de $k < -1, k = -1, k = n+1, k > n, 0 \leq k \leq n$)).
- Théorème du binôme de Newton + preuve+exemples

Chapitre 2 : Logique et raisonnements

A) Rudiments de logiques :

- Propositions : Définitions et premiers exemples
- Négation : Définition et premières tables de vérité
- Conjonctions et Disjonctions : Définitions et tables de vérités
- Implications et équivalences : Définitions, tables de vérités, Exemples,Conditions nécessaires, suffisantes
- Propriétés/règles de calcul : Idempotence, Associativité, Distributivité, Loi de De Morgan, $P \Rightarrow Q \sim \text{non}\, P$ ou Q, Négation d'une implication, double implication, contraposition ...

B) Prédicats et quantificateurs :

- Définitions :Prédicats, Quantificateur universel,d'existence, d'existence et d'unicités.

- Négation des quantificateurs, permutation des quantificateurs de même nature, non permutation en général du $\forall$ et du $\exists$.
- Raisonnement avec des quantificateurs

C) Modes de raisonnement :

- Principe de déduction (Modus ponens)
- Disjonction de cas
- Preuve implication/ équivalences
- Preuve par contraposition
- Raisonnement par l'absurde
- Analyse-synthèse : Exemple phare : Toute fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ peut s'écrire de manière unique comme la somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire.
- Récurrence simple :Propriété de bon ordre de $\mathbb{N}$
- Applications : Théorème de récurrence simple,récurrence double, récurrence forte

Questions de cours :

- Preuve du théorème du binôme de Newton.
- Preuve que toute fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est la somme unique d'une fonction paire et d'une fonction impaire (par analyse-synthèse).
- Preuve par disjonctions de cas que pour $n \in \mathbb{N}$, n et n^2 ont même parité puis preuve par l'absurde que $\sqrt{2}$ est irrationnel.
- Preuve par récurrence double que (u_n) définie par :$u_0 = 2, u_1 = 5$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n$ a pour terme général $u_n = 3^n + 2^n$ puis preuve par récurrence forte que tout entier supérieur ou égal à 2 admet un diviseur premier.