I Questions préliminaires

Problème n° 1

(Divers)

1) Soit $x \in \mathbb{R}$, pour montrer l'égalité voulue, on va partir du membre de droite :

$$\begin{aligned} a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a} &= a(x^2+2x\frac{b}{2a}+\frac{b}{2a}^2)-\frac{b^2-4ac}{4a} \\ &= (ax^2+b+\frac{b^2}{4a})-(\frac{b^2}{4a}-\frac{4ac}{4a}) \\ &= (ax^2+b+\frac{b^2}{4a})-(\frac{b^2}{4a}-c) \\ &= ax^2+b+c. \end{aligned}$$

On a donc bien démontré l'égalité voulue pour tout x dans $\mathbb{R}$.

2) Soit P un polynôme du second degré. Soit $a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0$ tels que pour tout x dans $\mathbb{R}$, R,

$$P(x) = ax^2+bx+c.$$

Son discriminant Δ vaut b^2-ac On va prouver par double implication que $\Delta \leq 0 \iff P$ de signe constant sur $\mathbb{R}$. : ($\Leftarrow$) Supposons que P est un polynôme du second degré de discriminant négatif ou nul.
D'après la question précédente, on a pour tout x dans R,

$$P(x) = a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a}. \tag{1}$$

On a donc :

$$P(x) = a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a}. \tag{2}$$

Par hypothèse, on a $\Delta \leq 0$ donc $-\Delta \geq 0$ et donc $-\frac{\Delta}{4a}$ est du signe de a. Comme, de même, on a $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 \geq 0$, $a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$ est du signe de a. On a donc que $P(x)$ est du signe de a, et ceci pour tout x dans $\mathbb{R}$ donc P reste de signe constant sur $\mathbb{R}$.
($\Rightarrow$) Pour l'implication réciproque, on va raisonner par contraposition (Message aux élèves : Je vous rapelle que la contraposition de $A \Rightarrow B$ c'est $\neg B \Rightarrow \neg A$, on veut montrer que si le discriminant de P est strictement positif, alors P n'est pas de signe constant).
On suppose que $\Delta > 0$, d'après (2),

$$\begin{aligned} P(-\frac{b}{2a}) &= a\left(-\frac{b}{2a}+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a} \\ &= -\frac{\Delta}{4a} \end{aligned}$$

Comme $\Delta > 0$ on en déduit donc que $P(-\frac{b}{2a})$ est du signe opposé de a.
De même, on a que

$$\begin{aligned} P(\frac{-b}{2a}+|\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}|+1) &= a(|\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}|+1)^2-\frac{\Delta}{4a} \\ &= -\frac{\Delta}{4a}+2\frac{a}{|2a|}\sqrt{\Delta}+a-\frac{\Delta}{4a} \\ &= 2\frac{a}{|2a|}\sqrt{\Delta}+a \end{aligned}$$

Or $2\frac{a}{|2a|}\sqrt{\Delta}$ est du signe de a et différent de 0 car si $a < 0, \frac{a}{|2a|} = -2$ est du signe de a et si $a > 0, \frac{a}{|2a|} = 2$ est du signe de a.

(Remarque : on a l'impressions que $\frac{-b}{2a} + |\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}| + 1$ sort de nulle part dans ce raisonnement, et c'est un peu le cas. Ici il fallait juste montrer que P allait également prendre des valeurs du même signe que a et donc il suffit d'en choisir une. J'en ai donné une mais on aurait pu en choisir une autre qui fonctionne ou même regarder les limites du polynôme pour dire qu'il prendra nécessairement des valeurs du même signe que a.)

P ne reste donc pas de signe constant ce qui prouve l'implication par contraposition.

Par double implication, on a donc :

$$P \text{ reste de signe constant} \Longleftrightarrow \text{Le discriminant de } P \text{ est négatif ou nul.}$$

Problème n° 2

1) On a que $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$. (Remarque : Ici, je n'ai pas besoin d'introduire la variable n car elle est donnée dans l'énoncé) Prouvons ce résultat :

Posons $S = \sum_{k=1}^{n} k$ (Remarque : Plusieurs fois dans ce DS, je pose $S =$ "ce qu'on doit calculer". Ici j'en ai besoin pour la preuve mais souvent c'est parce que lorsqu'on interrompt une suite d'égalité pour mettre un commentaire, pour reprendre la suite d'égalité, j'ai juste à reprendre avec $S = ...$).

Remarquons que $S = \sum_{k=0}^{n} k$ (car le terme d'indice 0 de cette somme est nul).

Posons le changement d'indice $j = n - k$:

$$S = \sum_{j=0}^{n}(n-j) \overset{j \text{ est une variable muette}}{=} \sum_{k=0}^{n}(n-k).$$

On a donc en utilisant les deux expressions pour S :

$$\begin{aligned} 2S = S + S &= \sum_{k=0}^{n} k + \sum_{k=0}^{n}(n-k) \\ &\overset{\text{Linéarité}}{=} \sum_{k=0}^{n} n = n(n+1). \end{aligned}$$

On obtient donc :

$$S = \frac{2S}{2} = \frac{n(n+1)}{2}.$$

2) Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, soit $n \in \mathbb{N}$, $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$.

3) $a^n - b^n = (a-b)\sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k}$.

4) On utilise la formule du binôme de Newton :

$$\begin{aligned} (a-b)^4 = (a+(-b))^4 &= \sum_{k=0}^{4}\binom{4}{k} a^k (-b)^{n-k} \\ &= \binom{4}{0}a^0(-b)^4 + \binom{4}{1}a^1(-b)^3 + \binom{4}{2}a^2(-b)^2 + \binom{4}{3}a^3(-b)^1 + \binom{4}{4}a^4(-b)^0 \\ &= b^4 - 4ab^3 + 6a^2b^2 - 4a^3b + a^4. \end{aligned}$$

5) $a^3 + b^3 = a^7 - (-b)^7$ donc on peut utiliser la formule de factorisation (aussi appellée formule de Bernouilli) :

$$a^7 + b^7 = (a-(-b))\sum_{k=0}^{7} a^k(-b)^{7-k} = (a+b)(a^7 - a^6b + a^5b^2 - a^4b^3 + a^3b^4 - a^5b^5 + a^1b^6 - a^0b^7).$$

6) Par définition, $\begin{pmatrix} 7 \\ 4 \end{pmatrix} = \frac{7!}{4!3!} = \frac{4!\times5\times6\times7}{4!\times1\times2\times3} = 5\times7 = 35.$

7) $1+4+7+10+\cdots+40 = \sum_{k=0}^{13}(3k+1) = 3\sum_{k=0}^{13} k + \sum_{k=0}^{13} 1 = \frac{13(13+1)}{2} + 14 = 287.$

8)

9) La question paraît compliqué mais il s'agit ici d'un simple télescopage :
On pose pour $k\in\mathbb{Z}, u_k = \cos(e^k)$. Ainsi si on noté P le produit à calculer on a :

$$\begin{aligned} P &= \prod_{k=1}^{n} \frac{u_{k+1}}{u_k} \\ &\overset{\text{Télescopage}}{=} \frac{u_{n+1}}{u_1} \\ &= \frac{\cos(e^{n+1})}{\cos(e)}. \end{aligned}$$

10)

$$\sum_{k=0}^{n} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} 5^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} 1^k 5^{n-k}$$

On applique le théorème du Binôme de Newton,on obtient :

$$\sum_{k=0}^{n} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} 5^{n-k} = (1+5)^n = 6^n.$$

11) On pose $S = \sum_{k=1}^{n} k^2 + k - 9$. On effectue le changement d'indice $j = k+3$: Comme k va de 1 à n, j va de 4 à $n+3$ et on obtient :

$$\begin{aligned} S &= \sum_{j=4}^{n+3} (j-3)^2 + (j-3) - 9 \\ &= \sum_{j=4}^{n+3} j^2 - 6j + 9 + (j-3) - 9 \\ &= \sum_{j=4}^{n+3} j^2 - 5j - 3. \end{aligned}$$

12) a) D'après le cours, pour cette somme double triangulaire, on a $\sum_{1\leq i\leq j\leq n} a_{i,j} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i}^{n} a_{i,j} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{j} a_{i,j}$.

b) On reconnaît ici une somme double triangulaire comme à la question précédente. On va inverser les deux sommes en réutilisant ce qui précède :

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i}^{n}\frac{i^2}{j(j+1)} &= \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{j}\frac{i^2}{j(j+1)}\\
&= \sum_{j=1}^{n}\frac{1}{j(j+1)}\sum_{i=1}^{j}i^2\\
&= \sum_{j=1}^{n}\frac{j(j+1)(2j+1)}{6j(j+1)}\\
&= \frac{1}{6}\sum_{j=1}^{n}(2j+1)\\
&= \frac{1}{3}\frac{n(n+1)}{2}+\frac{1}{6}n\\
&= \frac{n}{6}(n+2)
\end{aligned}$$

Donc $\boxed{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i}^{n}\frac{i^2}{j(j+1)}=\frac{n}{6}(n+2)}$

13) a) On a :

$$\begin{aligned}
(k+1)!-k! &= (k+1)k!-k!\\
&= k!(k+1-1)\\
&= k.k!.
\end{aligned}$$

b) Posons $P=\prod_{k=1}^{n}2^{kk!}$.
Comme pour tout $k\in[\![1,n]\!], 2^{kk!}>0$, on peut considérer $\log(P)$. On a :

$$\begin{aligned}
\log(P) &= \sum_{k=1}^{n}kk!\log(2)\\
&\overset{\text{Question précédente}}{=} \log(2)\cdot\sum_{k=1}^{n}(k+1)!-k!\\
&\overset{\text{Télescopage}}{=} \log(2)\cdot[(n+1)!-1]
\end{aligned}$$

Donc $P=e^{\log(P)}=2^{(n+1)!-1}$.

14) a) Il s'agit ici simplement de résolution d'inégalité :

$$0\leq 2j\leq 100 \Leftrightarrow 0\leq j\leq 50$$

et

$$\begin{aligned}
0\leq 2j+1\leq 100 &\Leftrightarrow -1\leq 2j\leq 99\\
&\Leftrightarrow \frac{-1}{2}\leq j\leq\frac{99}{2}\\
&\overset{j\text{ est un entier}}{\Leftrightarrow} 0\leq j\leq 49
\end{aligned}$$

b) Posons $S = \sum_{k=0}^{100}(-1)^k k^3$

$$\sum_{k=0}^{100}(-1)^k k \overset{\text{Relation de Chasles pair/impair}}{=} \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ pair}}}^{100} k^3 - \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ impair}}}^{100} k^3.$$

De plus,

$$k \text{ pair et } 0 \leq k \leq 100 \Leftrightarrow k = 2l \text{ avec } 0 \leq l \leq 50$$

et

$$k \text{ impair et } 0 \leq k \leq 100 \Leftrightarrow k = 2l+1 \text{ avec } 0 \leq l \leq 49$$

Donc :

$$\begin{aligned} S &= \sum_{j=0}^{50}(2j)^3 - \sum_{j=0}^{49}(2j+1)^3 \\ &= 8A_{50} - \sum_{j=0}^{49} 8j^3 + 3.4j^2 + 3.(2j) + 1 \\ &= 8(A_{50} - A_{49}) - 12\frac{49(49+1)(2.49+1)}{6} - 6\frac{49(49+1)}{2} - 1 \\ &= 8.50^3 - 2.49.50.99 - 3.49.50 - 1. \end{aligned}$$

1) Posons $S = \sum_{k=2}^{n} \ln\left(\frac{k^2}{k^2-1}\right)$.

$$\sum_{k=2}^{n} \ln\left(\frac{k^2}{k^2-1}\right) = \sum_{k=2}^{n} \ln\left(\frac{k.k}{(k-1)(k+1)}\right)$$

Or comme pour tout $k \in [\![2,n]\!]$, $k+1 > 0$, $k > 0$ et $k-1 > 0$ on a que pour $k \in [\![2,n]\!]$, $\ln\left(\frac{k.k}{(k-1)(k+1)}\right) = \ln(k) + \ln(k) - \ln(k-1) - \ln(k+1)$. On a donc que :

$$\begin{aligned} S &= \sum_{k=1}^{n}(\ln(k) - \ln(k-1)) + (\ln(k) - \ln(k+1)) \\ &\overset{\text{Linéarité}}{=} \sum_{k=1}^{n}(\ln(k) - \ln(k-1)) + \sum_{k=1}^{n}(\ln(k) - \ln(k+1)) \\ &\overset{\text{Télescopages}}{=} \ln(n) - \ln(1) + \ln(2) - \ln(n+1). \end{aligned}$$

Ce qui est bien le résultat attendu.

II Problèmes

Problème n° 3

1) Remarque : Les 2 questions suivantes fonctionnent en prenant $n \in \mathbb{N}$ mais c'est une erreur de ma part, on va plutôt prouver ces 2 propriétés pour $n \geq 1$ (pour $n = 0$, les sommes valent 0 car on somme de 1 à 0). On raisonne par récurrence :

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $P(n)$ la proposition " $\sum_{k=1}^{n} u_k \geq 0$."

Initialisation :

Au rang $n = 1$, $P(n)$ s'écrit "$\sum_{k=1}^{1} u_k \geq 0$, Or $u_1 \geq 0$ donc $P(1)$ est vraie.

Hérédité :
On suppose la propriété vraie au rang $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\sum_{k=1}^{n+1} u_k = \sum_{k=1}^{n} u_k + u_n + 1$$

Or $u_n + 1 \geq 0$ par hypothèse de l'énoncé donc $\sum_{k=1}^{n} u_k + u_n + 1 \geq \sum_{k=1}^{n} u_k$.
De plus, par hypothèse de récurrence, $\sum_{k=1}^{n} u_k \geq 0$ donc :

$$\sum_{k=1}^{n+1} u_k = \sum_{k=1}^{n} u_k + u_n + 1 \geq \sum_{k=1}^{n} u_k \geq 0.$$

Ce qui prouve la propriété au rang $n+1$.
Par théorème de récurrence, on a donc que $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, ce qu'on voulait démontrer.

2) On va raisonner par récurrence : Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $P(n)$ la proposition "$\sum_{k=1}^{n} uk = 0 \Leftrightarrow \forall k \in [\![1,n]\!], u_k = 0.$"
Initialisation :
Au rang $n = 1, P(n)$ s'écrit " $\sum_{k=1}^{1} uk = 0 \Rightarrow \forall k \in [\![1,1]\!], u_k = 0.$", ce qui peut se réécrire "$u_1 = 0 \Rightarrow u_1 = 0$", ce qui est vrai.
Hérédité :
On suppose la propriété vraie au rang n, Supposons que $\sum_{k=1}^{n+1} u_k = 0$.
Montrons tout d'abord que $u_{n+1} = 0$. Supposons par l'absurde que $u_{n+1} > 0$, on a alors :

$$\sum_{k=1}^{n} u_k = \sum_{k=1}^{n+1} u_k - un + 1 = 0 - u_{n+1} = -un + 1 < 0.$$

ce qui est absurde car par la question 1 on sait que $\sum_{k=1}^{n} u_k \geq 0$.
On a donc $u_{n+1} = 0$. Par conséquent,

$$\sum_{k=1}^{n} u_k = \sum_{k=1}^{n+1} u_k - un + 1 = 0.$$

Or, par hypothèse de récurrence $\sum_{k=1}^{n} u_k = 0 \Rightarrow \forall k \in [\![1,n]\!], u_k = 0$. On a donc que pour tout k dans $[\![1,n]\!], u_k = 0$ et $u_{n+1} = 0$, ce qui montre la proposition au rang $n+1$. Par théorème de récurrence, on a donc prouvé que $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

3) a) Soit $k \in [\![1,n]\!]$, $(x_k - 1)^2 \geq 0$ car le carré d'un nombre réel est positif. S est donc une somme de réels positifs, par la question 1, S est positive ou nulle.

b) Attention ! Beaucoup d'entre vous ont donné un argument du type "$\sum_{k=1} nx_k = \sum_{k=1}^{n} 1$ donc $x_k = 1$ pour tout k". Or ce n'est pas parce que deux sommes sont égales que tous leur termes sont égaux. Exemple simple : $1+3 = 2+2$ et aucun des termes du membre de gauche n'est égal au terme du membre de droite.

$$\begin{aligned}
S &= \sum_{k=1}^{n} (x_k - 1)^2 \\
&= \sum_{k=1}^{n} x_k^2 - 2x_k + 1 \\
&= \sum_{k=1}^{n} x_k^2 - 2\sum_{k=1}^{n} x_k + \sum_{k=1}^{n} 1 \\
&= n - 2.n + n = 0.
\end{aligned}$$

S est donc une somme de termes positifs dont tous les termes sont nuls. D'après la question 2, tout ses termes sont donc nuls. Donc pour tout $k \in [\![1,n]\!], (x_k-1)^2 = 0$.

On a donc pour tout $k \in [\![1,n]\!], x_k - 1 = 0$ soit encore $x_k = 1$, ce qui conclut.

4) (Inégalité de Cauchy-Schwarz) Soit $a_1,\dots,a_n$ et $b_1,\dots,b_n$ des réels. On veut démontrer que :

a) Soit $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{k=1^n}(a_k x + b_k)^2 \\ &= \sum_{k=1^n} a_k^2 x^2 + 2a_k b_k x + b_k^2. \\ &= x^2 \sum_{k=1}^{n} a_k^2 + 2x\sum_{k=1}^{n} a_k b_k + \sum_{k=1}^{n} b_k^2 \\ &= x^2 A + 2xC + B. \end{aligned}$$

b) A est une somme de termes positifs (car pour tout $k \in [\![1,n]\!], a_k^2 \geq 0$, le carré d'un nombre réel étant toujours positif) qui est nulle,

D'après la question 2 tout ses termes sont donc nuls, ce qui signifie que pour tout $k \in 1n, a_k^2 = 0$ et donc $a_k = 0$.

On a donc également pour tout $k \in 1n, a_k b_k = 0$. Ceci implique que C est nul également.

De plus, l'inégalité (1) peut se réécrire :

$$|C| \leq \sqrt{A}\sqrt{B}.$$

Ce qui connaissant A et C se réécrit $0 \leq 0$, ce qui est vrai.

(1) est donc vrai pour $A = 0$.

c) Soit x dans $\mathbb{R}$, $f(x)$ s'exprime d'après l'énoncé comme une somme de terme positifs. Par la question 1, on a que $f(x) \geq 0$. Ceci étant vrai pour tout x dans $\mathbb{R}$, f reste de signe constant sur $\mathbb{R}$.

De plus d'après la question 4)a) on sait que f est un polynôme en x. f est donc un polynôme qui garde un signe constant dans $\mathbb{R}$.

Or d'après la question 2 de l'exercice 1, on sait qu'un polynôme de signe constant sur $\mathbb{R}$ a son discriminant négatif ou nul.

Donc le discriminant de f est négatif ou nul.

Or le discriminant Δ de f est $\Delta = (2C)^2 - 4AB = 4(C - AB)$. Donc si $\Delta \leq 0$, $4(C^2 - AB) \leq 0$ donc $C^2 \leq AB$.

En prenant la racine carré de cette inégalité, ce qui est possible car tout ses termes sont positifs, on obtient :

$$|C| \leq \sqrt{A}\sqrt{B}$$

Soit encore,

$$\left|\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right| \leqslant \sqrt{\sum_{k=1}^{n} a_k^2}\sqrt{\sum_{k=1}^{n} b_k^2}.$$

Ce qui conclut.

d) Application : démontrer que : Pour tout k dans $1n$, on pose $a_k = k$ et $b_k = 1$. D'après la question précédente (inégalité de Cauchy-Schwarz), on obtient que :

$$\sum_{k=1}^{n} |\sqrt{k}.1| \leq \sqrt{\sum_{k=1}^{n} k}\sqrt{\sum_{k=1}^{n} 1}$$

Soit encore,

$$\sum_{k=1}^{n} |\sqrt{k}| \leq \sqrt{\frac{n(n+1)}{2}}\sqrt{n} = n\sqrt{\frac{n+1}{2}}.$$

Ce qui conclut.

<u>Problème n° 4</u>

1) a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$,

En appliquant le théorème du binôme de Newton, on obtient :

$$S_{n,0} = (1-1)^n = 0^n = 0 \text{ (Car } n \neq 0 \text{).}$$

b)

$$S_{0,0} = \sum_{k=0}^{0} (-1)^0 \binom{0}{k} k^0 = (-1)^0 \binom{0}{0} 1 = 1.$$

2) a) Remarque : Il n'est pas impossible que je me sois trompé dans quelques remarques laissées sur les copies pour cette question. En effet, ici, x a déjà été introduit, on a pas à le réintroduire.

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-x)^k 1^{1-k} \\ &\overset{\text{Binôme de Newton}}{=} (1-x)^n. \end{aligned}$$

Remarque : ici je n'ai pas dit "j'applique le thm du binôme de Newtoné", j'ai été un peu plus rapide. Comme dit en cours, c'est le genre de chose qu'on peut faire une fois qu'on a appliqué le théorème plusieurs fois PROPREMENT avant.

b) Pour tout $k \in 0n, f_k : x \mapsto \binom{n}{k}(-x)^k$ est dérivable comme produit d'une constante et d'une fonction puissance de x. La question 3 de l'exercice 1 nous assure alors que f est dérivable de dérivée $f^{'} \sum_{k=0}^{n} f_k^{'}$. De plus on connaît la dérivée de f avec la formule donnée pour f dans la question précédente. On a donc, pour $x \in \mathbb{R}$:

$$f^{x} = -n(1-x)^{n-1}$$

et

$$f^{'}(x) = \sum_{k=0}^{n} f_k^{'}(x) = \sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}(-x)^{k-1} = \sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k}(-x)^{k-1}.$$

Remarque : Pour justifier la dérivabilité on pouvait également simplement utiliser la question précédente.

c) Soit $n > 1$, on a :

$$\begin{aligned} S_{1,1} &= \sum_{k=0}^{1} \binom{1}{k}(-1)^k k \\ &= -f^{'}(1)(\text{Pour } n=1) = -1(1-1)^{1-1} = -1. \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} S_{n,1} &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}(-1)^k k \\ &= -f^{'}(1) = -n(1-1)^{n-1} = 0. \end{aligned}$$

1) a) Soit $k \in N^*$,

$$k\binom{n}{k} = k\frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{k(k-1)!(n-k)!} = \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!}$$

De plus,

$$n\binom{n-1}{k-1} = \left(\frac{n(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!}\right) = \left(\frac{n!}{(k-1)!(n-k)!}\right)$$

On a donc bien que

$$k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}.$$

b) $\binom{n-1}{k-1} = \binom{n}{k} - \binom{n-1}{k} \Leftrightarrow \binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$ ce qui est vrai par la formule de Pascal.

c)

$$\begin{aligned}
S_{n,p+1} &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}(-1)^k k^{p+1} \\
&= \sum_{k=0}^{n} k.\binom{n}{k}(-1)^k k^p \\
&\overset{\text{Question 2)1)a)}}{=} \sum_{k=0}^{n} n\binom{n-1}{k-1}(-1)^k k^p \\
&\overset{\text{Question précédente}}{=} \sum_{k=0}^{n} n\binom{n}{k} - \binom{n-1}{k}(-1)^k k^p \\
&= n[\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}(-1)^k k^p - \sum_{k=0}^{n} \binom{n-1}{k}(-1)^k k^p]
\end{aligned}$$

De plus $\binom{n-1}{n} = 0$ donc $\sum_{k=0}^{n} \binom{n-1}{k}(-1)^k k^p = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k}(-1)^k k^p$ et donc :

$$S_{n,p+1} = n[\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}(-1)^k k^p - \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k}(-1)^k k^p] = n[S_{n,p} - S_{n-1,p}].$$

d) Remarque : Cette question est difficile dans la mesure où on a l'impression de faire 2 récurrences en même temps, bien poser sa proposition n'est pas évident ici, regardez bien le procédé. En pratique c'est en se rendant compte de comment doit marcher l'hérédité qu'on va pouvoir bien fixer la proposition.) On va raisonner par récurrence sur p :
Pour $p \in \mathbb{N}$, on pose $P(p)$ la proposition "$\forall n \in \mathbb{N}^*, n > p, S_{n,p} = 0$".
Initialisation :
Au rang $p = 0$, $P(p)$ s'écrit "$\forall n \in \mathbb{N}^*, n > p, S_{n,0} = 0$", ce qui est vrai d'après la question 1a).
Hérédité : On suppose la propriété vraie au rang p.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $n > p + 1$.
D'après la question précédente, $S_{n,p+1} = n(S_{n,p} - S_{n-1,p})$.
Comme $n > p+1$, on a également que $n > p$ et $n-1 > p$. Donc, par hypothèse de récurrence, $S_{n,p} = S_{n-1,p} = 0$.
La proposition est donc vraie au rang $n + 1$.
Par théorème de récurrence, la proposition $P(p)$ est donc vraie pour tout $p \in \mathbb{N}$.
On a donc bien :

$$\forall p \in \mathbb{N}, \forall n > p, S_{n,p} = 0.$$

Problème n° 5

Introduction à la série harmonique

1) $\sum_{k=1}^{n} c_k \leq \sum_{k=1}^{n} d_k \Leftrightarrow 0 \leq \sum_{k=1}^{n}(d_k - c_k)$ Or par hypothèse, $\forall k \in [\![1,n]\!] c_k \leq d_k$ donc $0 \leq (d_k - c_k)$.
D'après la question 1 du problème 1, on a donc $0 \leq \sum_{k=1}^{n}(d_k - c_k)$.
On conclut donc : $\boxed{\sum_{k=1}^{n} c_k \leq \sum_{k=1}^{n} d_k}$

2) On calcule $u_{n+1} - u_n = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \frac{1}{n+1} \geq 0$. On conclut donc La suite (u_n) est croissante.

3) On a

$$\begin{aligned} u_{2n} - u_n &= \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \\ &= \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \end{aligned}$$

On remarque de plus que

$$\forall k \in [\![n+1, 2n]\!], \quad \frac{1}{k} \geq \frac{1}{2n}$$

Il en résulte que

$$u_{2n} - u_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \geq \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{2n} = n\frac{1}{2n} = \frac{1}{2}$$

Il en résulte que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_{2n} - u_n \geq \frac{1}{2}$$

4) Supposons que (u_n) converge vers une limite finie ℓ, on a donc $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$ et $u_{2n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$ puis par opérations ur les limites, $u_{2n} - u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. On obtient donc une contradiction avec l'inégalité de la question précédente. On conclut

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$$

5) On a $w_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

6) En regroupant, tout au même dénominateur, on obtient

$$\frac{a}{n} + \frac{b}{n+1} + \frac{c}{2n+1} = \frac{(2a+2b+c)n^2 + (3a+b+c)n + a}{n(n+1)(2n+1)}$$

Pour que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{1}{n(n+1)(2n+1)} = \frac{a}{n} + \frac{b}{n+1} + \frac{c}{2n+1}$$

il suffit donc que $(2a+2b+c) = 0, (3a+b+c) = 0$ et $a = 1$, on résout et on trouve $a = b = 1$ et $c = -4$. On conclut que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{1}{n(n+1)(2n+1)} = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} - \frac{4}{2n+1}.$$

7) Première méthode, par récurrence, un peu lourd, mais cela marche. Seconde méthode :

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2k+1} &= \underbrace{\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2k+1}+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2k}}_{\text{(tous les termes de la forme } \frac{1}{k} \text{ pour } k \text{ comprise entre 2 et } 2n+1.)} - \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2k}\\ &= \sum_{k=2}^{2n+1}\frac{1}{k}-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\\ &= \sum_{k=1}^{2n}\frac{1}{k}-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}+\frac{1}{2n+1}-1\\ &= u_{2n}-\frac{1}{2}u_n-1+\frac{1}{2n+1}\end{aligned}$$

On conclut

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\quad \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2k+1}=u_{2n}-\frac{1}{2}u_n-1+\frac{1}{2n+1}$$

8) En utilisant la question 6 , on a

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{6}{k(k+1)(2k+1)}$$

Utilisant les question 6 et 7 , on en déduit

$$\begin{aligned}S_n &= 6\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}+\frac{1}{k+1}-\frac{4}{2k+1}\\ &= 6\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}+6\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k+1}-24\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2k+1}\\ &= 6u_n+6\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-1+\frac{1}{n+1}\right)-24\left(u_{2n}-\frac{1}{2}u_n-1+\frac{1}{2n+1}\right)\\ &= -24u_{2n}+24u_n+18+\frac{6}{n+1}+\frac{1}{2n+1}\end{aligned}$$

On conclut

$$S_n=-24u_{2n}+24u_n+18+\frac{6}{n+1}+\frac{1}{2n+1}$$