

L'usage de la calculatrice est interdit. Les raisonnements présentés devront être soigneusement justifiés et détaillés, quelques points seront dédiés à la présentation, l'orthographe et la propreté de votre copie. En particulier, **il est IMPERATIF de souligner les résultats obtenus**. Il n'est pas nécessaire de répondre à l'ensemble des questions pour avoir une bonne note. Si vous ne parvenez pas à résoudre une question, vous pouvez admettre le résultat dans la suite de l'énoncé. Lisez bien tout le sujet avant de commencer et identifiez les parties plus simples pour vous, et commencez par ces parties.

I Questions préliminaires

Dans ce devoir, j'indique par une ★ les questions plus longues ou plus difficiles que la moyenne mais qui seront également plus valorisées en terme de notation.

Exercice n°1 (Divers)

On dit qu'une fonction ou un polynôme est de signe constant si elle ne prend que des valeurs positives ou nulles ou que des valeurs négatives ou nulles sur tout son ensemble de définition. Le but de cet exercice est d'établir à quelles conditions un polynôme du second degré est de signe constant.

- 1) Soit a, b, c 3 réels avec $a > 0$. Montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}.$$

- 2) En déduire qu'un polynôme de second degré est de signe constant **si et seulement si** son discriminant est négatif ou nul.

Exercice n°1

(Divers)

- 1) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, donner la valeur de $\sum_{k=1}^n k$ et prouver ce résultat sans effectuer de récurrence.
- 2) Énoncer la formule du binôme de Newton.
- 3) Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et $n \in \mathbb{N}^*$, donner la formule permettant de factoriser $a^n - b^n$.
- 4) Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, développer $(a - b)^4$.
- 5) Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, factoriser $a^7 + b^7$.
- 6) Que vaut $\binom{7}{4}$?
- 7) Que vaut $1 + 4 + 7 + 10 + \dots + 40$?
- 8) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, simplifier $\prod_{k=1}^n \frac{\cos(e^k \cdot e)}{\cos(e^k)}$.
- 9) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, simplifier $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 5^{n-k}$.
- 10) Soit $n \in \mathbb{N}$, Réexprimer $\sum_{k=1}^n k^2 + k - 9$ avec le changement d'indice $j = k + 3$ (ne pas faire le calcul ensuite).
- 11) a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $a_{i,j}$ une famille de réels indexée par $\llbracket 1, n \rrbracket^2$, exprimer de deux manières différentes la somme :

$$\sum_{1 \leq i \leq j \leq n} a_{i,j}$$

b) Calculer $\sum_{i=1}^n \sum_{j=i}^n \frac{i^2}{j(j+1)}$

- 12) a) Montrer, pour $j \in \mathbb{N}$ que $j \cdot j! = (j+1)! - j!$
b) En déduire la valeur $\prod_{k=1}^n 2^{k \times k!}$.

- 13) ★ Pour cette question, pour tout $N \in \mathbb{N}$ on pose $A_N = \sum_{k=0}^N k^3$
- Soit $n = 100$. Pour quelles valeurs de $j \in \mathbb{N}$ a-t-on $0 \leq 2j \leq 100$? De même, Pour quelles valeurs de $j \in \mathbb{N}$ a-t-on $0 \leq 2j + 1 \leq 100$?
 - En déduire $\sum_{k=0}^{100} (-1)^k k^3$ (on fera bien les calculs jusqu'au bout).
- 14) ★ Soit $n \in \mathbb{N}, n > 2$, montrer que $\sum_{k=2}^n \ln\left(\frac{k^2}{k^2-1}\right) = \ln(n) - \ln(1) + \ln(2) - \ln(n+1)$.

II Problèmes

Problème n° 1

- Soit $(u_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ une suite de réels positifs. Montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}, (\sum_{k=1}^n u_k) \geq 0$.
- Soit $(u_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ une suite de réels positifs. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $\sum_{k=1}^n u_k = 0$. Montrer par récurrence que $\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, u_k = 0$.
- Soient n un entier naturel non nul, et $x_1, \dots, x_n$ n nombres réels.
 - Justifier que la somme $S = \sum_{k=1}^n (x_k - 1)^2$ est positive ou nulle.
 - On suppose à présent que les réels $x_1, \dots, x_n$ sont tels que

$$\sum_{k=1}^n x_k = n \quad \text{et} \quad \sum_{k=1}^n x_k^2 = n$$

Etablir que :

$$\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad x_k = 1$$

- 4) (Inégalité de Cauchy-Schwarz) Soit $a_1, \dots, a_n$ et $b_1, \dots, b_n$ des réels. On veut démontrer que :

$$\left| \sum_{k=1}^n a_k b_k \right| \leq \sqrt{\sum_{k=1}^n a_k^2} \sqrt{\sum_{k=1}^n b_k^2}. \quad (1)$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose

$$f(x) = \sum_{k=1}^n (a_k x + b_k)^2.$$

On pose aussi :

$$A = \sum_{k=1}^n a_k^2, B = \sum_{k=1}^n b_k^2 \quad \text{et} \quad C = \sum_{k=1}^n a_k b_k.$$

- Soit $x \in \mathbb{R}$, exprimer $f(x)$ en fonction de A, B, C et x .
- On suppose que $A = 0$. Montrer (1).
- On suppose maintenant que $A \neq 0$. À l'aide d'une étude de signe de la fonction f , montrer (1).
- Application : démontrer que :

$$\sum_{k=1}^n \sqrt{k} \leq n \sqrt{\frac{n+1}{2}}.$$

Problème n° 2

Soient n et p deux entiers naturels, avec $n \geq p$. On pose :

$$S_{n,p} = \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} k^p$$

L'objectif de l'exercice est d'étudier quelques propriétés des sommes $S_{n,p}$.

- 1) Dans cette question on étudie le cas $p = 0$.
 - a) Montrer que pour tout entier naturel non nul n on a : $S_{n,0} = 0$.
 - b) Que vaut $S_{0,0}$?
- 2) Dans cette question on étudie le cas $p = 1$ (et donc $n \geq 1$). On pose : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} x^k$.
 - a) Soit $x \in \mathbb{R}$. Simplifier $f(x)$.
 - b) Montrer que f est dérivable et à l'aide de la question précédente, donner deux expressions différentes de sa dérivée f' (on admet que la dérivée d'une somme de fonctions est la somme de ses dérivées).
 - c) Dédire de la question précédente la valeur de $S_{1,1}$, et celle de $S_{n,1}$ pour tout entier $n > 1$.
- 3) On revient au cas général où n et p sont deux entiers naturels, avec $n \geq p$.
 - a) Etablir que : $\forall k \in \mathbb{N}^*, k \binom{n}{k} = n \binom{n-1}{k-1}$ (On redémontrera bien le résultat de bout en bout).
 - b) Justifier que : $\forall k \in \mathbb{N}^*, \binom{n-1}{k-1} = \binom{n}{k} - \binom{n-1}{k}$
 - c) En déduire que : $S_{n,p+1} = n(S_{n,p} - S_{n-1,p})$
 - d) Etablir que : $\forall p \in \mathbb{N}, \forall n > p, S_{n,p} = 0$.

Problème n° 3

Introduction à la série harmonique

EXERCICE BONUS : À ne traiter que si vous avez déjà bien traité les autres exercices

Rappel n°1 :

On dit qu'une suite (u_n) est croissante si $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq u_{n+1}$

Rappel n°2 :

Soit v_n et u_n 2 suites, si $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$ et $\forall n \in \mathbb{N}, v_n \leq u_n$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$

On définit la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ par $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$.

- 1) Soit $(c_k)_{k \in \llbracket 1, n \rrbracket}$ et $(d_k)_{k \in \llbracket 1, n \rrbracket}$ deux familles de réels. En utilisant la question 1 du problème 1, montrer que si pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket, c_k \leq d_k$, alors $\sum_{k=1}^n c_k \leq \sum_{k=1}^n d_k$.
On admettra le résultat dans la suite.
- 2) Prouver que u_n est croissante.
- 3) Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in \llbracket n, 2n \rrbracket$, comparer $\frac{1}{k}$ et $\frac{1}{n}$ (dire lequel est plus grand).
En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_{2n} - u_n \geq \frac{1}{2}$.
- 4) Montrer que (u_n) ne converge pas vers une limite finie (bien justifier)
On définit les suites $(w_n)_{n \geq 1}$ et $(S_n)_{n \geq 1}$ par

$$w_n = \sum_{k=1}^n k^2 \text{ et } S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{w_n}$$

- 1) Énoncer la valeur de w_n .

2) Déterminer $a, b, c \in \mathbb{R}$, tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{1}{n(n+1)(2n+1)} = \frac{a}{n} + \frac{b}{n+1} + \frac{c}{2n+1}$$

3) Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{k=1}^n \frac{1}{2k+1} = u_{2n} - \frac{1}{2}u_n - 1 + \frac{1}{2n+1}.$$

4) Exprimer S_n en fonction de u_n, u_{2n} et n .