

## Chapitre 3 : Inégalités sur $\mathbb{R}$

### A) Règles de calculs

- Définitions inégalités
- Manipulation élémentaires (sommations d'inégalités, produits d'inégalités, produit par un réel positif/négatif, inverse,...)
- Encadrement d'inégalités élémentaires.

### B) Lien entre fonctions et inégalités

- Application d'une fonction croissant/str croissante/décroissant/str décroissante à une inégalité.
- Fonctions croissantes classiques :  $\exp, \ln, x \mapsto x^2, \sin, \sqrt{\cdot}, \dots$
- Exemples : Résoudre sur  $\mathbb{R}_+^*$  l'équation  $\ln(2x + 1) < \ln(x) + 1$  .

### C) La fonction valeur absolue

- Définition, Interprétation sous forme de distance
- Premières propriétés
- Exemple de résolution d'inégalités avec valeurs absolues en utilisant des disjonctions de cas (Résoudre sur  $\mathbb{R}$ ,  $|4x - 2| \leq |x - 1|$ .)
- Valeur absolue du quotient, du produit du carré, de la puissance,...
- Application :  $a$  et  $b$  positifs, Montrer que  $|\sqrt{a} - \sqrt{b}| \leq \sqrt{|a - b|}$ .
- Inégalité triangulaire généralisé + cas d'égalité.
- Majoration d'une somme quelconque]

### D) La fonction partie entière

- Définition : Soit  $x \in \mathbb{R}$ ,  $\lfloor x \rfloor$  est l'unique entier tel que  $\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1$
- Définition partie entière supérieure
- Propriétés de la partie entière :  
Pour  $x \in \mathbb{R}$ ,
  - $x - 1 < \lfloor x \rfloor \leq x$ .
  - $\lfloor x \rfloor = \lceil x \rceil \Leftrightarrow x \in \mathbb{Z}$  .
  - $\lfloor x \rfloor$  est le plus grand entier  $n$  vérifiant  $n \leq x$ .
  - La fonction partie entière est croissante.

### E) Parties majorées, minorées, minimum et maximum

- Définition parties majorées, parties minorées, partie bornée.

## Chapitre 4 : Fonctions de la variables réelle

### A) Généralités sur les fonctions

- Définition de la notion de fonction, espace de départ (l'espace d'arrivée est pour l'instant fixé à  $\mathbb{R}$  ou éventuellement un sous-ensemble de  $\mathbb{R}$ ).
- Domaine de définition d'une fonction.
- Représentation graphique, premiers exemple (la représentation graphique est vue comme une aide à l'intuition.)
- Opérations sur les fonctions (sommations, produits, quotients, composées)
- Fonctions paires/impaires : Def, propriétés, lien avec la représentation graphique

- Fonctions périodiques (def, ex du sin, cos,  $x \mapsto x - \lfloor x \rfloor$ , la définition de période minimale n'a pas été abordé, lien avec la représentation graphique.)
- Fonctions croissantes, décroissantes, str croissantes, str décroissantes, monotones...
- Fonctions majorées, minorées, admettant un maximum, un minimum...
- Asymptotes verticales, horizontales, obliques (le calcul de limite en lui même n'a pas été trop exploré pour l'instant.)
- Perturbations de fonctions et leur impact sur la représentation graphique (translations, symétries, ...)

## B) Dérivabilité d'une fonction de la variable réelle

- Notion de fonction dérivable, nombre dérivée

## Questions de cours :

Tous les étudiants doivent être capable de redonner les définitions du Chapitre 3 et 4 avec des quantificateurs.

- Preuve de l'inégalité triangulaire généralisée : Montrer que pour tout  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ ,  $||x| - |y|| \leq |x + y| \leq |x| + |y|$ . et rappeler, sans le montrer, le cas d'égalité de  $|x + y|$  et  $|x| + |y|$ . (Vu Lundi 22)
- Preuve de propriétés de la fonction partie entière (inférieure) à partir de la définition (**Qu'on rappellera!**) :  
Soit  $x \in \mathbb{R}$ ,
  - Montrer que  $x - 1 < \lfloor x \rfloor \leq x$ .
  - Montrer que la fonction partie entière est croissante.
  - Montrer que  $\lfloor x \rfloor = x \Leftrightarrow x \in \mathbb{Z}$ .
- Pour  $f$  et  $g$  2 fonctions monotones de même monotonie.
  - Montrer que  $f + g$  est monotone.
  - Montrer que si  $f$  et  $g$  sont positives alors  $fg$  est monotone de même monotonie que  $f$  et  $g$ .  
On donnera un contre-exemple quand  $f$  et  $g$  ne sont pas positives et quand  $f$  et  $g$  ne sont pas de même monotonie (vu Lundi)
  - Si  $g \circ f$  est définie, discuter de la monotonie de  $g \circ f$  en fonction de leur monotonie respectives (on prouvera 1 des 4 cas) (vu Lundi)
- On montrera les 3 propriétés suivantes :
  - Si  $f$  est périodique de période  $T$  alors pour tout  $k \in \mathbb{Z}^*$ ,  $kT$  est une période de  $f$ .
  - Montrer que pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $\lfloor x + 1 \rfloor = \lfloor x \rfloor + 1$
  - Montrer que  $x \mapsto x - \lfloor x \rfloor$  est 1-périodique.