Chapitre 3 : Inégalités sur $\mathbb{R}$

A) Règles de calculs

- Définitions inégalités
- Manipulation élémentaires (sommes d'inégalités, produits d'inégalités, produit par un réel positif/négatif,inverse,...)
- Encadrement d'inégalités élémentaires.

B)Lien entre fonctions et inégalités

- Application d'une fonction croissant/str croissante/décroissante/str décroissante à une inégalité.
- Fonctions croissantes classiques : $\exp, \ln, x \mapsto x^2, \sin, \sqrt{}, ..$
- Exemples : Résoudre sur $\mathbb{R}_+^*$ l'équation $\ln(2x+1) < \ln(x) + 1$).

C) La fonction valeur absolue

- Définition,Interprétation sous forme de distance
- Premières propriétés
- Exemple de résolution d'inégalités avec valeurs absolues en utilisant des disjonctions de cas (Résoudre sur $\mathbb{R}$, $|4x-2| \leq |x-1|$.)
- Valeur absolue du quotient, du produit du carré, de la puissance,...
- Application : a et b positifs, Montrer que $|\sqrt{a} - \sqrt{b}| \leq \sqrt{|a-b|}$.
- Inégalité triangulaire généralisé + cas d'égalité.
- Majoration d'une somme quelconque]

D) La fonction partie entière

- Définition : Soit $x \in \mathbb{R}$, $\lfloor x \rfloor$ est l'unique entier tel que $\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1$
- Définition partie entière supérieure
- Propriétés de la partie entière :
  Pour $x \in \mathbb{R}$,
  (a) $x - 1 < \lfloor x \rfloor \leq x$.
  (b) $\lfloor x \rfloor = \lceil x \rceil \Leftrightarrow x \in \mathbb{Z}$.
  (c) $\lfloor x \rfloor$ est le plus grand entier n vérifiant $n \leq x$.
  (d) La fonction partie entière est croissante.

E) Parties majorées, minorées, minimum et maximum

- Définition parties majorées, parties minorées,partie bornée, maximum, minimum.

F) Intervalles de $\mathbb{R}$

- Def (9 intervalles possibles)
- Prop : Les intervalles de $\mathbb{R}$ sont les parties de I $\mathbb{R}$ tels que pour tout $a, b \in I, [a, b] \in I$(non démontré).

Chapitre 4 : Fonctions de la variables réelle

A) Généralités sur les fonctions

- Définition de la notion de fonction, espace de départ (l'espace d'arrivée est pour l'instant fixé à $\mathbb{R}$ ou événtuellement un sous-ensemble de $\mathbb{R}$).
- Domaine de définition d'une fonction.
- Réprésentation graphique, premiers exemple (la représentation graphique est vue comme une aide à l'intuition.)
- Opérations sur les fonctions (sommes, produits,quotients,composées)
- Fonctions paires/impaires : Def, propriétés, lien avec la représentation graphique
- Fonctions périodiques(def,ex du sin,cos,$x \mapsto x - \lfloor x \rfloor$, la définition de période minimale n'a pas été abordé, lien avec la représentation graphique.)
- La somme/le produit de fonctions T-périodique pour $T > 0$ est T-périodique mais la somme de fonctions périodique n'est pas périodique en général.
- Foncttions croissantes, décroissantes, str croissantes, str décroissantes, monotones...
- Fonctions majorées, minorées, admettant un maximum, un minimum...
- Asymptotes verticales, horizontales, obliques (le calcul de limite en lui même n'a pas été trop exploré pour l'instant.)
- Perturbations de fonctions et leut impact sur la représentation graphique (translations,symétries,...)

B) Dérivabilité d'une fonction de la variable réelle

- Notion de fonction dérivable, nombre dérivée, équation de la tangente
- Opérations sur les fonctions dérivables (sommes, produit, quotient, composées,..)
- Rappel des dérivées classiques.

Questions de cours :

- Être capable de redonner les définitions avec des quantificateurs parmi les propriétés du chapitre 4 partie A) (au choix du colleur) ainsi que l'impact de tels propriétés sur le graphe de la fonction. Application pour une fonction définie par le colleur.

- (Vu en TD) Montrer que pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$,
$$\left\lfloor \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} \right\rfloor = \lfloor x \rfloor.$$

- Pour $(x, y) \in \mathbb{R}$, montrer que $1 + |xy - 1| \leq (1 + |x - 1|)(1 + |y - 1|)$.

- (fonctions périodiques (1))
  1) Montrer que la somme et le produit de deux fonctions T-périodiques sur $\mathbb{R}$ sont des fonctions T-périodiques.
  2) Montrer que pour $n \in \mathbb{Z}^*$, si T est une période d'une fonction f alors nT est également une période de cette fonction f (on pourra commencer par le montrer sur $\mathbb{N}^*$).

- (fonctions périodiques (2)) Pour tout $a > 0$, on considère la fonction f_a définie sur $\mathbb{R}$ par : $\forall x \in \mathbb{R}, f_a(x) = \sin(\pi x) + \sin(a\pi x)$.
  1) Montrer que si $a \in \mathbb{Q}$ alors f_a est périodique.
  2) On suppose dans cette question que $a = \sqrt{2}$.
    a) Résoudre l'équation $f_a(x) = 0$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.
    b) En déduire que f_a n'est pas périodique.