TD 4 : Trigonométrie

1 Résoudre les équations suivantes pour $x \in]-\pi;\pi]$ puis pour $x \in \mathbb{R}$:

1) $\frac{\pi}{2} \equiv x[2\pi]$;
2) $\frac{3\pi}{4} \equiv x[\pi]$;
3) $\frac{52\pi}{3} \equiv x[\pi]$;
4) $\frac{145\pi}{3} \equiv x\left[\frac{\pi}{2}\right]$.

2 Simplifier les valeurs de sin et cos suivantes :

1) $\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)$;
2) $\sin\left(-\frac{5\pi}{2}\right)$;
3) $\cos\left(\frac{27\pi}{3}\right)$;
4) $\cos\left(\frac{5\pi}{3}\right)$;
5) $\cos\left(-\frac{7\pi}{6}\right)$;
6) $\sin\left(-\frac{31\pi}{6}\right)$.

3 Calculer $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)$.

4 (Formules de Simpson). Soit $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$.

1) Montrer qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$ tels que $a+b=x$ et $a-b=y$.
2) En déduire une formule donnant $\cos(x)+\cos(y)$ comme un produit.
3) Même question pour $\sin(x)+\sin(y)$.

5 Résoudre les équations trigonométriques suivantes pour $x \in]-\pi;\pi]$ puis pour $x \in \mathbb{R}$:

1) $\cos(x) = \cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$;
2) $\cos(x) = -\frac{1}{2}$;
3) $\tan(x) = \tan\left(\frac{\pi}{5}\right)$;
4) $\sin(x) = \sin\left(\frac{\pi}{5}\right)$
5) $\sin(x) = -\frac{1}{2}$
6) $\tan(x) = -1$

6 Résoudre les inéquations trigonométriques suivantes pour $x \in]-\pi;\pi]$:

1) $\cos(x) \leqslant \cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$;
2) $\cos(x) > \frac{1}{2}$;
3) $\sin(x) \leqslant \frac{1}{2}$
4) $\sin(x) > \sin\left(\frac{\pi}{5}\right)$
5) $\tan(x) < 1$

7 Soit $x \in \mathbb{R}$. Sans utiliser de nombres complexes, exprimer les quantités suivantes en fonction des puissances de $\cos x$ et $\sin x$:

1) $\cos(3x)$;
2) $\sin(3x)$
3) $\cos(4x)$
4) $\sin(4x)$

8 Pour tout x indiqué, simplifier les expressions suivantes :

1) $\frac{\sin(3x)}{\sin(x)} - \frac{\cos(3x)}{\cos(x)} (x \in]0;\frac{\pi}{2}[)$;
2) $\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right) + \sin\left(x+\frac{5\pi}{6}\right) + \sin\left(x-\frac{\pi}{2}\right) (x \in \mathbb{R})$;
3) $\frac{1-\cos(2x)}{\sin(2x)} (x \in]0;\frac{\pi}{2}[)$

9 Résoudre les équations trigonométriques suivantes pour $x \in]-\pi;\pi]$ puis pour $x \in \mathbb{R}$:

1) $\sin(2x) = \frac{1}{\sqrt{2}}$
2) $\cos\left(2x-\frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(x+\frac{3\pi}{4}\right)$;
3) $\cos(x) = \sin(x)$;
4) $\sin^2(x) = \frac{3}{4}$
5) $\cos(x)\sin(3x) = 0$;
6) $\cos^2(x) - \frac{3}{2}\cos(x) = 1$

10 Résoudre les inéquations trigonométriques suivantes pour $x \in]-\pi;\pi]$:

1) $-\frac{1}{2} < \sin(2x) \leqslant \frac{\sqrt{3}}{2}$;
2) $\cos(x) > \cos\left(\frac{x}{2}\right)$;
3) $\cos^2(x) < \frac{3}{4}$;
4) $\sin^2(x) \geqslant \frac{1}{2}$;
5) $\tan^2(x) \leqslant 3$

11

1) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $(E) : \sin\theta = \sqrt{3}\cos\theta$.
Indication : Se ramener à une équation du type $\tan\theta = \dots$
2) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $(I) : \sin(\theta) \geqslant \sqrt{3}\cos(\theta)$.
Indication. On pourra tout passer du même côté puis utiliser une formule d'addition.

12 Soit $x \in \mathbb{R}$, tel que, $x \not\equiv \frac{\pi}{2}[\pi]$ et $x \not\equiv \pi[2\pi]$. Exprimer $\tan(x)$ en fonction de $\tan(\frac{x}{2})$:

1) À l'aide des formules de l'angle moitié

2) À l'aide des formules d'addition de la tangente.

13 Montrer que $|\sin(nx)| \leqslant n|\sin x|$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$.

14 Résoudre graphiquement les inéquations suivantes d'inconnue x :

1) $\cos x \geqslant \frac{1}{\sqrt{2}}$.

2) $\sin x > -\frac{1}{2}$.

3) $|\tan x| \leqslant 1$.

4) $\ln \tan \frac{\pi x}{2} > 0$.

15

1) Montrer que $\tan x > x$ pour tout $x \in]0, \frac{\pi}{2}[$.

2) Montrer que la fonction $x \longmapsto \frac{x}{\sin x}$ est bijective de $]0, \frac{\pi}{2}[$ sur son image que l'on précisera.