TD 3 : Inégalités et fonctions de la variable réelle

♡ = Exercice thématique, ★ = Niveau de difficulté, $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

Egalités, inégalités et partie entière

1 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes. On écrira les solutions sous forme d'union d'intervalles que l'on représentera.

1) $|x+1|\leq 4$
2) $\sqrt{4x^2+5}\leq 2x-3$
3) $\frac{4x-1}{2x+1}\geq 1$
4) $|x-5|\leq \sqrt{2x+1}$
5) $|2x-4|\leq |x-1|$
6) $x-5\leq \sqrt{2x^2+1}$
7) $\ln(2x+1)<\ln x+1$.
8) $\sqrt{2x-1}<\sqrt{x+1}+1$.
9) $\left|x^2+x+1\right|>|x-4|$
10) $|x|+|x+1|+|x+2|\leq 3$

2 Soient x et y des réels. Démontrer les inégalités suivantes :

1) $|x|+|y|\leq |x+y|+|x-y|$
2) $1+|xy-1|\leq (1+|x-1|)(1+|y-1|)$
3) $\frac{|x+y|}{1+|x+y|}\leq \frac{|x|}{1+|x|}+\frac{|y|}{1+|y|}$.

3 Soit $n\in\mathbb{N}$ et $a_0,a_1,\dots,a_n$ des réels de même signe tous strictement supérieurs à -1 . Montrer que : $\prod_{k=0}^{n}(1-a_k)>1+\sum_{k=0}^{n}a_k$.

4 Résoudre :

1) $\lfloor\sqrt{x}\rfloor=\left\lfloor\frac{x}{2}\right\rfloor$
2) $\sum_{k=1}^{2023}\lfloor\sqrt{k}\rfloor$.
3) Soient a,b deux réels. Prouver que $\lfloor a\rfloor+\lfloor b\rfloor\leq\lfloor a+b\rfloor\leq\lfloor a\rfloor+\lfloor b\rfloor+1$. et $\lfloor a\rfloor+\lfloor a+b\rfloor+\lfloor b\rfloor\leq\lfloor 2a\rfloor+\lfloor 2b\rfloor$.

5 Soit $n\geq 1$ un entier.

1) Démontrer que $2n\leq 2\sqrt{n(n+1)}<2n+1$.
2) En déduire la valeur de $\left\lfloor(\sqrt{n}+\sqrt{n+1})^2\right\rfloor$.

6 Montrer que pour $n\in\mathbb{N}^*$ et $x\in\mathbb{R}$,

$$\left\lfloor\frac{\lfloor nx\rfloor}{n}\right\rfloor=\lfloor x\rfloor.$$

7 Soient a,b et c, 3 réels de l'intervalle $[0;1]$. Montrer que l'un au moins des réels $a(1-b)$, $b(1-c)$ et $c(1-a)$ est inférieur ou égal à $\frac{1}{4}$.

8 ★ Démontrer les inégalités suivantes :

1) $\forall(a,b)\in\mathbb{R}^2, ab\leq\frac{1}{2}\left(a^2+b^2\right)$
2) $\forall(a,b,c)\in\mathbb{R}^3, ab+bc+ac\leq a^2+b^2+c^2$
3) $\forall(a,b)\in\left(\mathbb{R}_+^*\right)^2, \frac{1}{2}(\ln(a)+\ln(b))\leq\ln\left(\frac{a+b}{2}\right)$
4) $\forall a,b\geq 0,\quad \sqrt{ab}\leq\frac{1}{2}(a+b)$
5) $\forall(a,b)\in\mathbb{R}^2, (a+b)^4\leq 8\left(a^4+b^4\right)$
6) $\forall(a,b,c)\in\mathbb{R}^3, (a+b+c)^2\leq 4a^2+4b^2+2c^2$

9 Soient $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$, démontrer que :

$$||x|-|y||\leq|x+z|+|y+z|.$$

9.5 Pour $x\in[-\pi,\pi]$ donner le signe de $\sin(x)(\sin(x)-1)(2\cos(x)-1)$.

Généralités sur les fonctions

10 Déterminer les ensembles de définition des fonctions suivantes :

1) $f : x \mapsto \ln(2-x)$
2) $g : x \mapsto \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$
3) $h : x \mapsto \frac{\ln(\sqrt{3x+7})}{4-x^2}$
4) $i : x \mapsto \sqrt{\ln(\ln(\ln(x)))}$

11 (Cours) Soit $T > 0$.

1) Montrer que la somme et le produit de deux fonctions T-périodiques sur $\mathbb{R}$ sont des fonctions T-périodiques.
2) Montrer que pour $n \in \mathbb{Z}^*$, si T est une période d'une fonction f alors nT est également une période de cette fonction f (on pourra commencer par le montrer sur $\mathbb{N}^*$).
3) Lorsque l'ensemble des périodes d'une fonction f admet un minimum, on appelle ce minimum **période minimale** de f.
   Montrer que la somme de deux fonctions périodiques sur $\mathbb{R}$ de période minimale T n'est pas nécessairement de période minimale T.

   Pour tout $a > 0$, on considère la fonction f_a définie sur $\mathbb{R}$ par : $\forall x \in \mathbb{R}, f_a(x) = \sin(\pi x) + \sin(a\pi x)$.
4) Montrer que si $a \in \mathbb{Q}$ alors f_a est périodique.
5) On suppose dans cette question que $a = \sqrt{2}$.
   a) Résoudre l'équation $f_a(x) = 0$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.
   b) En déduire que f_a n'est pas périodique.

12 ★ Déterminer les fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ monotones et périodiques.

13 ★ Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que $f \circ f$ est croissante et $f \circ f \circ f$ strictement décroissante. Montrer que f est strictement décroissante.

14 ★★ Montrer que l'application suivante est bijective et exprimer $f^{-1}(y)$ pour tout $y \in \mathbb{R}$: $\begin{array}{rccc} f : &]-1,1[& \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \frac{x}{1-x^2} \end{array}$

15 Soit $I \subset \mathbb{R}$.

1) Montrer que la somme de deux fonctions minorées (resp. majorées) sur I est une fonction minorée (resp. majorée) sur I. Qu'en déduire sur la somme de deux fonctions bornées sur I ?
2) Montrer que le produit de deux fonctions bornées sur I est une fonction bornée sur I.
3) Est-ce que le quotient de deux fonctions bornées ne s'annulant pas sur I est encore une fonction bornée ?

16 Soit $f : x \mapsto x^2 + \ln(x)$.

1) Montrer que f est une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ dans un ensemble à déterminer.
2) Montrer que sa réciproque f^{-1} est dérivable sur son ensemble de définition et exprimer sa dérivée $f^{-1'}$ en fonction de f^{-1}.
3) Etudier les variations de f^{-1}

17 Montrer que les fonctions suivantes sont périodiques sur l'ensemble considéré, et déterminer leur période minimale :

1) $f : x \mapsto \cos(4x)$ sur $\mathbb{R}$;
2) $h : x \mapsto \sin(6x)\sin(2x)$ sur $\mathbb{R}$;
3) $g : x \mapsto \cos^2(4x)$ sur $\mathbb{R}$;
4) $\mathbb{1}_{\mathbb{Z}}$ sur $\mathbb{R}$. ($\mathbb{1}_{\mathbb{Z}}(x)$ vaut 1 si $x \in \mathbb{Z}$, 0 sinon)

18 Soit $f : x \mapsto x^2 + \ln(x)$

1) Montrer que f est une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ dans un ensemble à déterminer.
2) Montrer que sa réciproque f^{-1} est dérivable sur son ensemble de définition et exprimer sa dérivée $f^{-1'}$ en fonction de f^{-1}.
3) Etudier les variations de f^{-1}.

19

1) Montrer, grâce au TVI strictement monotone, que la fonction $x \xrightarrow{f} \sqrt{x^3-1}$ est bijective de $[1, +\infty[$ sur son image (à préciser).
2) Retrouver le résultat de la question 1) et déterminer une expression explicite de f^{-1} en résolvant l'équation $y = f(x)$ d'inconnue $x \in [1, +\infty[$.

20 Déterminer les ensembles de définition, continuité et dérivabilité des fonctions :

1) $x \longmapsto \sqrt{\ln x}$.

2) $x \longmapsto \sqrt{e^x + 2e^{-x} - 3}$.

3) $x \longmapsto \sqrt{2 - |x-3|}$.

4) $x \longmapsto \frac{\ln(x^2-4)}{\sqrt{4x^2-2x+1}}$.

21 Tracer rapidement l'allure du graphe des fonctions :

1) $x \longmapsto \sqrt{3x-4}$.

2) $x \longmapsto \frac{5}{2x+1}$.

3) $x \longmapsto 1 + \ln(2-x)$.

22 (Application du TVI) Un cycliste parcourt 40 km en 2h (on admettra que la distance qu'il a parcouru au bout d'un certain temps est une fonction continue du temps). Montrer qu'il y a un intervalle de temps d'1h où il a parcouru exactement 20 km.

23 Etudiez et représentez

1) $f(x) = \sqrt{x^2 + 3x - 4}$.

2) $f(x) = \sin^2 x + \cos x$.

3) $f(x) = x + \ln(1 + e^x)$.