Chapitre 7 : Fonctions usuelles

A) Logarithme et exponentielle

Défintion logarithme comme primitive de la fonction inverse.

Propriétes logarithme, pour $a, b \in \mathbb{R}^+, n \in \mathbb{N}, \ln(ab), \ln(\frac{a}{b}), \ln(a^n)$.

Etude de la fonction ln.

Pour $x \in]-1, +\infty[$, $\ln(1+x) \leq x$.

Bijectivité de la fonction logarithme.

Définition exponentielle comme bijection réciproque de la fonction logarithme.

$\exp(a+b), \exp(na), n \in \mathbb{N}, \exp(a-b)$.

Etude de la fonction exp

$\forall x \in \mathbb{R}, \exp(x) \geq 1+x$

Tracé des deux fonctions

B) Fonctions puissances

- Définîtion fonctions puissances par $x \mapsto \exp(a\ln(x))$.. Notation φ_a
- Extension des propriétés des fonctions puissances entières aux fonctions puissances en général $(\ln(x^a), x^{a+b}, x^a y^a \cdots)$
- Définition prolongement et restrictions.
- Prolongement par continuité en 0 pour les φ_a avec $a \geq 0$.+ dérivabilité (ou non) de ces fonctions puissances en 0.
- Etude complète des fonctions puissances avec disjonction de cas $(a > 1, a = 1, 0 < a < 1, a = 0, a < 0)$.
- Théorèmes de croissances comparées.

C)Fonctions circulaires (directes et réciproques)

- Etudes des fonctions $\cos, \sin, \tan$
- Définition des fonctions bijectives réciproques
- Etude des fonctions bijectives réciproques.
- Cas où $\arcsin(\sin(x)) = x$, où $\arccos(\cos(x)) = x$, où $\arctan(\tan(x)) = x$.

D) Fonctions hyperboliques

- Définition des fonctions hyperboliques
- $\forall x \in \mathbb{R}, \cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$.
- Etude complète des fonctions hyperboliques.

E) Fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$

- Fonctions à valeurs complexes
- Pour $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, définition de $\Im(f), \Re(f), \overline{f}, |f|$.
- Dérivabilité des fonctions à valeurs complexes
- Opérations sur les fonctions dérivables à valeurs complexes (somme,produit, composée $f \circ \varphi$ où f à valeurs dans $\mathbb{C}$ et φ à valeurs dans $\mathbb{R}$) .
- Dérivabilité de e^f où f est à valeurs complexes.

Questions de cours :

- Etude et tracé de la fonction Arccos, Arcsin OU Arctan (OU mathématique).

- Etude et tracé des fonctions puissances φ_a (on fera la distinction entre $a > 1, 0 < a < 1$ et $a < 0$ en précisant lesquelles sont prolongeable par continuité en 0 et parmi celles-ci lesquelles sont dérivables en 0.)

- Prouver que $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$ et en déduire que $\forall a > 0, b > 0, \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln^b(x)}{x^a} = 0$.
- Etude et tracé de la fonction th.
- Dérivabilité de e^f pour $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ et dérivée de e^f.