

Problème n° 1

Autour de la partie entière :

- 1) Le but de cette première question est de montrer que pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$,

$$\left\lfloor \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} \right\rfloor = \lfloor x \rfloor.$$

On va pour ceci raisonner par double inégalité :

- a) Montrer que :

$$\frac{\lfloor nx \rfloor}{n} \leq x < \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} + \frac{1}{n}$$

- b) En déduire que ;

$$\left\lfloor \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} \right\rfloor \leq \lfloor x \rfloor.$$

- c) Montrer que :

$$n\lfloor x \rfloor \leq nx < n\lfloor x \rfloor + n.$$

- d) En déduire un minorant de $\lfloor nx \rfloor$ puis conclure.

- 2) Dans cette question, on va étudier la "partie entière supérieure" d'un nombre réel.

Soit $x \in \mathbb{R}$, on admet qu'il existe un unique entier $N \in \mathbb{Z}$ vérifiant :

$$N - 1 < x \leq N$$

On note cette entier $\lceil x \rceil$ et on l'appelle partie entière supérieure de x . Dans les questions suivantes, on démontre quelques propriétés d'un tel objet :

- Donner la partie entière supérieure de 3, 3.5, et -2 .
- Soit $x \in \mathbb{R}$, montrer que $x \leq \lceil x \rceil < x + 1$
- Montrer que la fonction partie entière supérieure est croissante.
- Soit $x \in \mathbb{R}$, montrer que $\lfloor x \rfloor = \lceil x \rceil \Leftrightarrow x \in \mathbb{Z}$.

Problème n° 2

Complexes et racines de l'unité

Soit $u = e^{\frac{2i\pi}{11}}$. On pose :

$$S = u + u^3 + u^4 + u^5 + u^9 \text{ et } T = u^2 + u^6 + u^7 + u^8 + u^{10}$$

- Justifier que $u^{11} = 1$ et $\bar{u} = \frac{1}{u}$.
- En déduire que S et T sont conjugués.
- Démontrer que $S + T = -1$ et $S \times T = 3$.
- En déduire les valeurs de S et T .
- On rappelle que par définition : $\tan\left(\frac{3\pi}{11}\right) = \frac{\sin\left(\frac{3\pi}{11}\right)}{\cos\left(\frac{3\pi}{11}\right)}$.
- a) Démontrer que :

$$i \tan\left(\frac{3\pi}{11}\right) = \frac{u^3 - 1}{u^3 + 1} = - \sum_{k=1}^{10} (-u^3)^k$$

- b) Démontrer que : $4i \sin\left(\frac{2\pi}{11}\right) = 2(u - u^{10})$.

- c) En déduire que : $\tan\left(\frac{3\pi}{11}\right) + 4 \sin\left(\frac{2\pi}{11}\right) = i(T - S) = \sqrt{11}$.

Problème n° 3**Autour des fonctions trigonométriques réciproques****1) (Questions préliminaires) :**

Donner les valeurs des expressions suivantes lorsqu'elles sont définies (on précisera pourquoi quand elles ne le sont pas) :

$$\arccos(\cos(\frac{21\pi}{4})), \cos(\arccos(\frac{21\pi}{4})), \arcsin(\sin(\frac{3\pi}{5})), \sin(\arcsin(\frac{3\pi}{5})), \tan(\arctan(\frac{5\pi}{2})), \arctan(\tan \frac{5\pi}{2}).$$

2) On pose $A = 4 \arctan(\frac{1}{5})$.

- a) En utilisant 2 fois la formule d'addition/duplication de la tangente déterminer la valeur de $\tan(A)$ qu'on notera B .
- b) Montrer que $0 \leq A \leq \pi$ (on pourra encadrer $\frac{1}{5}$ judicieusement).
- c) En déduire que $A = \tan(B)$.

3) Soient x et y deux réels tels que $0 < x < y$.

- a) Montrer que :

$$\arctan\left(\frac{x}{y}\right) + \arctan\left(\frac{y-x}{y+x}\right) \in [0, \frac{\pi}{2}[$$

- b) En déduire que :

$$\arctan\left(\frac{x}{y}\right) + \arctan\left(\frac{y-x}{y+x}\right) = \frac{\pi}{4}.$$

4) Montrer que : $4 \arctan(\frac{1}{5}) - \arctan(\frac{1}{239}) = \frac{\pi}{4}$.**5) En utilisant un procédé similaire à la question 2), calculer $\arccos \frac{3}{4} + \arccos \frac{2}{3}$.****Problème n° 4**

(BONUS : Pour les plus motivés)

Etablir que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \operatorname{Arctan}(\operatorname{sh} x) = \operatorname{Arccos}\left(\frac{1}{\operatorname{ch} x}\right)$$