

TD 4 : TRIGONOMÉTRIE

1 Résoudre les équations suivantes pour $x \in]-\pi; \pi]$ puis pour $x \in \mathbb{R}$:

1) $\frac{\pi}{2} \equiv x[2\pi];$ 2) $\frac{3\pi}{4} \equiv x[\pi];$	3) $\frac{52\pi}{3} \equiv x[\pi];$ 4) $\frac{145\pi}{3} \equiv x[\frac{\pi}{2}].$
--	---

2 Simplifier les valeurs de sin et cos suivantes :

1) $\cos(-\frac{\pi}{3});$ 2) $\sin(-\frac{5\pi}{2});$	3) $\cos(\frac{27\pi}{3});$ 4) $\cos(\frac{5\pi}{3});$	5) $\cos(-\frac{7\pi}{6});$ 6) $\sin(-\frac{31\pi}{6}).$
---	---	---

3 Calculer $\cos(\frac{\pi}{8})$ et $\sin(\frac{\pi}{8})$.

4 (Formules de Simpson). Soit $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$.

- 1) Montrer qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$ tels que $a + b = x$ et $a - b = y$.
- 2) En déduire une formule donnant $\cos(x) + \cos(y)$ comme un produit.
- 3) Même question pour $\sin(x) + \sin(y)$.

5 Résoudre les équations trigonométriques suivantes pour $x \in]-\pi; \pi]$ puis pour $x \in \mathbb{R}$:

1) $\cos(x) = \cos(\frac{\pi}{5});$ 2) $\cos(x) = -\frac{1}{2};$	3) $\tan(x) = \tan(\frac{\pi}{5});$ 4) $\sin(x) = \sin(\frac{\pi}{5});$	5) $\sin(x) = -\frac{1}{2}$ 6) $\tan(x) = -1$
---	--	--

6 Résoudre les inéquations trigonométriques suivantes pour $x \in]-\pi; \pi]$:

1) $\cos(x) \leq \cos(\frac{\pi}{5});$ 2) $\cos(x) > \frac{1}{2};$	3) $\sin(x) \leq \frac{1}{2}$ 4) $\sin(x) > \sin(\frac{\pi}{5})$	5) $\tan(x) < 1$
---	---	------------------

7 Soit $x \in \mathbb{R}$. Sans utiliser de nombres complexes, exprimer les quantités suivantes en fonction des puissances de $\cos x$ et $\sin x$:

1) $\cos(3x);$ 2) $\sin(3x)$	3) $\cos(4x)$ 4) $\sin(4x)$
---------------------------------	--------------------------------

8 Pour tout x indiqué, simplifier les expressions suivantes :

- 1) $\frac{\sin(3x)}{\sin(x)} - \frac{\cos(3x)}{\cos(x)} (x \in]0; \frac{\pi}{2}[);$
- 2) $\sin(x + \frac{\pi}{6}) + \sin(x + \frac{5\pi}{6}) + \sin(x - \frac{\pi}{2}) (x \in \mathbb{R});$
- 3) $\frac{1 - \cos(2x)}{\sin(2x)} (x \in]0; \frac{\pi}{2}[)$

9 Résoudre les équations trigonométriques suivantes pour $x \in]-\pi; \pi]$ puis pour $x \in \mathbb{R}$:

1) $\sin(2x) = \frac{1}{\sqrt{2}}$ 2) $\cos(2x - \frac{\pi}{3}) = \sin(x + \frac{3\pi}{4});$ 3) $\cos(x) = \sin(x);$	4) $\sin^2(x) = \frac{3}{4}$ 5) $\cos(x) \sin(3x) = 0;$ 6) $\cos^2(x) - \frac{3}{2} \cos(x) = 1$
--	--

10 Résoudre les inéquations trigonométriques suivantes pour $x \in]-\pi; \pi]$:

1) $-\frac{1}{2} < \sin(2x) \leq \frac{\sqrt{3}}{2};$	2) $\cos(x) > \cos(\frac{x}{2});$ 3) $\cos^2(x) < \frac{3}{4};$	4) $\sin^2(x) \geq \frac{1}{2};$ 5) $\tan^2(x) \leq 3$
---	--	---

11

1) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation (E) : $\sin \theta = \sqrt{3} \cos \theta$.

Indication : Se ramener à une équation du type $\tan \theta = \dots$

2) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation (I) : $\sin(\theta) \geq \sqrt{3} \cos(\theta)$.

Indication. On pourra tout passer du même côté puis utiliser une formule d'addition.

12 Soit $x \in \mathbb{R}$, tel que, $x \notin \frac{\pi}{2}[\pi]$ et $x \notin \pi[2\pi]$. Exprimer $\tan(x)$ en fonction de $\tan(\frac{x}{2})$:

- 1) À l'aide des formules de l'angle moitié
- 2) À l'aide des formules d'addition de la tangente.

13 Montrer que $|\sin(nx)| \leq n|\sin x|$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$.

14 Résoudre graphiquement les inéquations suivantes d'inconnue x :

- | | |
|---------------------------------------|-------------------------------------|
| 1) $\cos x \geq \frac{1}{\sqrt{2}}$. | 3) $ \tan x \leq 1$. |
| 2) $\sin x > -\frac{1}{2}$. | 4) $\ln \tan \frac{\pi x}{2} > 0$. |

15

- 1) Montrer que $\tan x > x$ pour tout $x \in]0, \frac{\pi}{2}[$.
- 2) Montrer que la fonction $x \mapsto \frac{x}{\sin x}$ est bijective de $]0, \frac{\pi}{2}[$ sur son image que l'on précisera.