

Chapitre 11 : Nombres réels et suites numériques

A) L'ensemble des nombres réels

- Propriété de la borne supérieure/inférieure sur $\mathbb{R}$.
- Caractérisation de la borne supérieure (classique et avec des ε .)
- Caractérisation des intervalles de $\mathbb{R}$ comme les uniques parties convexes de $\mathbb{R}$.
- Partie entière : $\mathbb{R}$ est archimédien, preuve de l'existence de la partie entière (Unicité dans chp inégalités)
- Approximation des réels par les décimaux.
- Parties denses dans $\mathbb{R}$
- $\mathbb{D}, \mathbb{Q}$ et $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ sont denses dans $\mathbb{R}$.

B) Généralités sur les suites réelles

- Terme général, famille d'éléments indexés sur $\mathbb{N}, \mathbb{N}^*$ ou $[n_0, +\infty[$
- Définition $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$
- somme, produit, multiplication par un réel d'une suite
- relation d'ordre
- suite majorée, minorée
- suite stationnaire
- Monotonie d'une suite (insistance sur le fait qu'on a besoin de regarder que 2 termes consécutifs)
- 3 méthodes pour prouver qu'une suite est croissante :
 - a) signe $u_{n+1} - u_n$
 - b) Si u est strictement positive, position de $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ par rapport à 1.
 - c) Etude de fonction.
- Exemples
- Notion d' "à partir d'un certain rang"

C) Limite d'une suite réelle

- Suites convergentes : Def, visualisation de la définition
- Unicité de la limite
- Toute suite bornée converge
- Caractère asymptotique de la limite
- Opérations sur les limites de suites (convergentes) :
- Produit, produit par un réel, somme, quotient,...
- Divergence vers $\pm\infty$
- Majoration, minoration pour suites divergentes vers $\pm\infty$
- Opérations sur les suites divergentes
- Si u converge vers $l \in \mathbb{R}$ avec $a < l < b$ alors passé un certain rang, $a < u_n < b$.
- Si (u) cv vers l et (v) converge vers l' avec $l < l'$ alors, passé un certain rang $u_n < v_n$.
- Théorème de passage à la limite dans les inégalités (larges)
- Théorème d'encadrement (gendarmes)
- Théorème de divergence vers $\pm\infty$
- Théorème de la limite monotone
- Toute suite convergente croissante (resp. décroissante) a son terme général majorée (resp. minoré) par sa limite.
- Def Suites adjacentes
- 2 suite adjacentes (a) et (b) converge vers une même limite l avec $\forall n \in \mathbb{N}, a_n \leq l \leq b_n$.

D) Suites extraites

- Définition extractrices et suites extraites
- Si φ extractrice, $\forall n \in \mathbb{N}, \varphi(n) \geq n$.
- Si une suite converge ses suites extraites convergent, t (rec fausse)
- Utilisation de la contraposée de ce résultat pour montrer la divergence d'une suite.
- Si u_{2n} et u_{2n+1} convergent vers une limite l alors u converge vers cette même limite.
- Théorème de Bolzano Weierstrass, démonstration par dichotomie.

E) Caractérisations séquentielles

- Caractérisation séquentielle de la densité.
- Caractérisation séquentielle de la borne supérieure

Questions de cours :

- On prouvera les propositions suivantes :
 - 1) $\mathbb{R}$ est archimédien (par la borne supérieure)
 - 2) En admettant le théorème d'approximation décimale des réels, prouver la densité de $\mathbb{D}, \mathbb{Q}, \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$.
- On prouvera les propositions suivantes :
 - 1) Unicité de la limite d'une suite convergente.
 - 2) Une suite convergente est bornée.
- On montrera les 3 propriétés suivantes :
 - a) Si u converge vers $l \in \mathbb{R}$ avec $a < l < b$ alors passé un certain rang, $a < u_n$
 - b) Théorème de passage à la limite : Si u est convergente de limite l et $\forall n \in \mathbb{N}, a \geq u_n$ alors $a \leq l$.
 - c) Théorème d'encadrement.
- Démonstration du théorème de Bolzano Weierstrass par dichotomie (pour alléger un peu la preuve, on pourra admettre que Les suites $(a_n), (b_n), n \in \mathbb{N}$ définies par dichotomies successives sont adjacentes.)