I Questions préliminaires

Exercice 1

1) cf cours (formule de l'angle moitié)

2) a) Il s'agit des racines n-ièmes de l'unité, l'ensemble des solutions est donc :

$$S = \{e^{\frac{2ik\pi}{n}, k\in[\![0,n-1]\!]}\}$$

b) On a :

Pour $z_0 = (2\sqrt{2})^{\frac{1}{n}} e^{\frac{i\pi}{4n}}$, on a donc $z_0^n = 2+2i$
Par suite, on a que :

$$\begin{aligned} z^n = 2+2i &\Leftrightarrow z^n = z_0^n \\ &\Leftrightarrow (\frac{z}{z_0})^n = 1 \\ &\Leftrightarrow z \in \{z_0 w, w \in S\} \\ &\Leftrightarrow \{(2\sqrt{2})^{\frac{1}{n}} e^{\frac{i\pi}{4n}}.e^{\frac{2ik\pi}{n}}, k \in [\![0, n-1]\!]\} \end{aligned}$$

3) Soit $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} \sin^4(x) \text{ Formule d'Euler } &(\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i})^4 \\ &= \frac{1}{16}[e^{4ix}+e^{-4ix}-4e^{2ix}-4e^{-2ix}+6] \\ &= \frac{1}{16}[2\cos(4x)-8\cos(2x)+6] \\ &= \frac{1}{8}\cos(4x)-\frac{1}{2}\cos(2)+\frac{3}{4} \end{aligned}$$

4) a) La similitude est de la forme $f : z \mapsto az+b$ avec $a = i = e^{\frac{i\pi}{2}}$. La similitude est donc une rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$.
Pour chercher son centre, on résoud $f(z_\Omega) = z_\Omega$, ce qui nous donne $z_\Omega = \frac{4}{1-i} = 2+2i$.
f est donc la rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$ et de centre $\Omega = (2,2)$.

b) Le cours nous donne rapidement que si f est la similitude considérée, $f : z \mapsto \exp(\frac{i\pi}{4})(z-(1+2i))+(1+2i)$, soit

$$f : z \mapsto (\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2})z+(1+2i)(1-(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2})$$

5) On est dans le cas d'une forme indéterminée. Il nous faut modifier l'expression de la fonction dont on cherche la limité pour faire apparaître des croissances comparées :
Soit $x > 0$, on a :

$$\ln(x)x^2 - \frac{e^x}{x^3} = \frac{e^x}{x^3}(\frac{\ln(x)}{x}\frac{x^6}{e^x}-1)$$

Or par croissances comparées, $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^3} = +\infty$, $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$, $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^6}{e^x} = 0$, donc on a :

$$\lim_{x\to+\infty} \ln(x)x^2 - \frac{e^x}{x^3} = -\infty.$$

6) cf cours.

7) a) ch est à valeurs dans $[1,+\infty]$

b) Létude de la fonction nous donne que ch est bijective de $\mathbb{R}_+$ sur $[1,+\infty[$ et de $\mathbb{R}_-$ sur $[1,+\infty[$. On a donc $I_2 = \mathbb{R}_+$.

c) Soit $y \geq 1$

$$\begin{aligned}\operatorname{ch}(x) = y &\Leftrightarrow \frac{e^x + e^{-x}}{2} = y \\ &\Leftrightarrow e^x + e^{-x} - 2y = 0 \\ &\Leftrightarrow e^{2x} - 2ye^x + 1 = 0\end{aligned}$$

En posant $X = e^x$, on résoud alors l'équation polynomiale $X^2 - 2yX + 1 = 0$ qui nous donne (car $y \geq 1$) les deux solutions suivantes :

$$X = \frac{2y - 2\sqrt{y^2-1}}{2} = y - \sqrt{y^2-1} \text{ ou } X = \frac{2y + 2\sqrt{y^2-1}}{2} = y + \sqrt{y^2-1}$$

Ce qui en revenant à $X = e^x$ donne alors :

$$x = \ln(y - \sqrt{y^2-1}) \text{ ou } x = \ln(y + \sqrt{y^2-1})$$

x étant positif on peut se convaincre rapidement que $\underline{x = \ln(y + \sqrt{y^2-1})}$.

On a donc

$$\operatorname{Argch}(y) = \ln(y + \sqrt{y^2-1}).$$

8) La fonction $x \mapsto \frac{x}{1+x^4}$ est définie syr $\mathbb{R}$, la primitive que nous allons calculer est donc valable sur $\mathbb{R}$. On pose $u = x^2$, $du = 2xdx$. On a :

$$\begin{aligned}\int^t \frac{x}{1+x^4}dx &= \int^t \frac{1}{2(1+x^4)}(2xdx) \\ &= \int^{t^2} \frac{1}{2}\frac{1}{1+u^2}du \\ &= \frac{1}{2}[\arctan(u)]^{t^2} \\ &= \frac{1}{2}\arctan(t^2)\end{aligned}$$

La primitive de la fonction est donc $t \mapsto \frac{1}{2}\arctan(t^2)$.

Exercice 2★

On considère les cas suivants : 1er cas : $0 < a < 1, \ln a < 0$ (Comportement de a^x contraire à celui de la fonction e^x) - Domaine de définition : $D_f = \mathbb{R}$ - Etude aux bornes de D_f :
Quand $x \to -\infty \quad x\ln a \to +\infty$ et $\lim_{x\to-\infty} \mathrm{e}^{x\ln a} \to +\infty$
Quand $x \to +\infty \quad x\ln a \to -\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{x\ln a} \to 0$ (Asymptote horizontale d'équation $y = 0$) - Fonctions dérivées $(a^x)' = \left(\mathrm{e}^{x\ln a'}\right)' = a^x \ln a < 0a^x$ strictement décroissante sur $\mathbb{R}$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$\left(a^x\right)' = a^x \ln a$		$-$	⋮	$-$	
a^x	$+\infty$	↘	1	↘	0

2ème cas : $a > 1, \ln a > 0$ (Comportement de a^x semblable à celui de la fonction e^x) - Domaine de définition : $D_f = \mathbb{R}$ - Etude aux bornes de D_f :

Quand $x \to -\infty$ $\quad x \ln a \to -\infty$ et $\lim_{x\to-\infty} \mathrm{e}^{x\ln a} \to 0$ (Asymptote horizontale d'équation $y = 0$)

Quand $x \to +\infty$ $\quad x \ln a \to +\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{x\ln a} \to +\infty$

- Fonctions dérivées $(a^x)' = a^x \ln a > 0 a^x$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$\left(a^x\right)' = a^x \ln a$		$-$	⋮	$-$	
a^x	$+\infty$	↘	1	↘	0

II Problèmes

Problème n° 1

Problème n° 1

1) a) Supposons que $iy \in i\mathbb{R}$ est une solution de (EQ1). En ce cas, par unicité de l'écriture d'un nombre complexe en notation algébrique, il vient

$$\text{(iy sol(EQ1)} \iff --iy^3 + (5+3i)y^2 + (7i-16)y + 3 - 21i = 0$$
$$\iff \begin{cases} -y^3 + 3y^2 + 7y - 21 = 0 \\ 5y^2 - 16y + 3 = 0 \end{cases}$$

En particulier, y est nécessairement solution de l'équation $5y^2 - 16y + 3 = 0$.

b) D'après la question précédente, on doit également avoir $-y^3 + 3y^2 + 7y - 21 = 0$.

c) Le polynôme $y \mapsto 5y^2 - 16y + 3$ admet pour discriminant. $\Delta = 16^2 - 4 \times 15 = 14^2$. Les racines de cette dernière équation du deuxième degré sont $y_1 = \frac{16+14}{10} = 3 y_2 = \frac{16-14}{10} = \frac{1}{5}$. On vérifie alors que 3 est bien racine des deux équations du système précédent, ce qui garantit que $z_0 = 3i$ est une racine imaginaire pure de l'équation (1). Par identification des coefficients, on a la factorisation :

$$P(z) = z^3 - (5+3i)z^2 + (7+16i)z + 3 - 21i = (z-3i)\left(z^2 - 5z + 7 + i\right)$$

d) Résolvons l'équation $z^2-5z+7+i=0$. Son discriminant est $\Delta = 25-4(7+\text{ i}) = -3-4i$. Cherchons une racine carrée δ de Δ en notation algébrique °

$$(x+iy)^2 = -3-4i \Longleftrightarrow \begin{cases} x^2-y^2 &= -3 \\ x^2+y^2 &= 5 \\ xy &< 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x &= \pm 1 \\ y &= \pm 2 \\ xy &< 0 \end{cases}$$

Une racine carrée de Δ est $\delta = 1-2i$. Les formules pour les équations polynomiales de degré deux permettent alors de conclure que $z_1 = \frac{5+1-2i}{2} = 3-i$ et $z_2 = \frac{5-1+2i}{2} = 2+i$ sont aussi solutions de (1). Finalement, l'ensemble des solutions de (1) est

$$\mathcal{S} = \{3i; 3-i; 2+i\}$$

2) a) Supposons que z est solution de (2), et que (u,v) est une solution de (3), alors d'une part $u^3 \times v^3 = -i$ et d'autre part, la formule du binôme donne $u^3+v^3 = (u+v)^3 - 3uv(u+v) = z^3 - 3iz = i-1$, puisque z est solution de (2). Ainsi, $\left(u^3, v^3\right)$ est solution ° du système somme-produit :

$$\begin{cases} u^3+v^3 = i-1 \\ u^3 \times v^3 = -i \end{cases}$$

Ce sont donc les solutions de l'équation :

$$w^2 + (1-i)w - i = 0$$

b) i et -1 sont racines de (E), on a donc $u^3 = i$ et $v^3 = -1$ ou le contraire. Convenons que $u^3 = i$, et déterminons en ce cas les valeurs possibles pour u : il s'agit des racines troisièmes de i. Or,

- une racine cubique particulière de $i = e^{i\pi/2}$ est $e^{i\pi/6}$.
- les racines troisièmes de l'unité sont 1, $j = e^{2i\pi/3} = e^{4i\pi/6}$ et j^2.
- en conclusion, les racines troisièmes de i sont $e^{i\pi/6}, e^{5i\pi/6}, e^{9i\pi/6} = e^{3i\pi/2}$.

En utilisant l'égalité $i = uv$, on obtient les valeurs de v correspondantes :

u	$e^{i\pi/6}$	
$v = i/u$	$e^{i\pi/3}$	
$z = u+v$	$\frac{1+\sqrt{3}}{2}(1+i)$	$\frac{1-}{2}$

c) En sommant les couples (u,v) précédemment obtenus, on obtient l'ensemble de solutions de (2) :

$$\mathcal{S} = \left\{ \frac{1+\sqrt{3}}{2}(1+i); \frac{1-\sqrt{3}}{2}(1+i); -(1+i) \right\}$$

d) Posons $Z = e^z$. Z vérifie l'équation (2) donc $Z = 3i, 3-i$ ou $2+i$. Il nous faut donc trouver les $z \in \mathbb{C}$ tels que $z = 3i, 3-i$ ou $2+i$. Je détaille pour le $Z = 3i$ et je donne les solutions pour les deux autres :

$3i = e^{ln(3)}i2$.

Donc $e^z = 3i \Leftrightarrow z = ln(3) + i(\frac{\pi}{2} + 2k\pi), k \in \mathbb{Z}$.

De la même manière on obtient que $Z = 3-i \Leftrightarrow z = \ln(\sqrt{10}) + i(\varphi_1 + 2k\pi), k \in \mathbb{Z}$ et $Z = 2+i \Leftrightarrow z = \ln(\sqrt{5}) + i(\varphi_2 + 2k\pi), k \in \mathbb{Z}$ où φ_1 et φ_2 sont des arguments de $\frac{3}{\sqrt{10}} - \frac{i}{\sqrt{10}}$ et $\frac{2}{\sqrt{5}} + \frac{i}{\sqrt{5}}$ respectivement.

Problème n° 2

1) a) Soit $z \in D$, notons $a = Re(z)$ et $b = Im(z)$ de sorte que $z = a+ib$.

On a alors que :

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{a-ib-i} \\ &= \frac{1}{a-i(b+1)} \\ &= \frac{a+i(b+1)}{a^2+(b+1)^2} \\ &= \frac{a}{a^2+(b+1)^2} + i\frac{b+1}{a^2+(b+1)^2} \end{aligned}$$

b) D'après la question a), pour $z \in D$, $f(z) \in \mathbb{R}$ si et seulement si $b+1=0$ où $b = Im(z)$ soit si $Im(z) = -1$. Cela répésente l'ensemble des points du plans sur la droite $y = -1$.

c) On a :

$$\begin{aligned} f(z) \in \mathbb{U} &\Leftrightarrow \frac{1}{\bar{z}-i} \in \mathbb{U} \\ &\Leftrightarrow |\frac{1}{\bar{z}-i}| = 1 \\ &\Leftrightarrow |\bar{z}-i| \ = 1 \\ &\Leftrightarrow |z+i| = 1 \end{aligned}$$

car le module du conjugué est le conjugué du module

D'après le cours on sait que ce sont les points sur le cerle de centre $(0,-1)$ (d'affixe $-i$) et de rayon 1.

2)

a) Soit $\theta \in]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}[$

$$\begin{aligned} 1+\tan^2(\theta) &= 1+\frac{\sin^2(\theta)}{\cos^2(\theta)} \\ &= \frac{\cos^2(\theta)+\sin^2(\theta)}{\cos^2(\theta)} \\ &= \frac{1}{\cos^2(\theta)}. \end{aligned}$$

b) En reprenant la question 1a) et sachant que $\tan(\theta)$ est un réel donc de partie imaginaire nulle, on a que :

$$f(\tan(\theta)) = \frac{\tan(\theta)}{\tan(\theta)^2+1^2} + i\frac{1}{\tan(\theta)^2+1^2}$$

En utilisant la question précédente, on a alors :

c) Pour montrer ceci, il suffit de montrer que $|f(\tan(\theta)) - \frac{i}{2}| = \frac{1}{2}$.
Or on a grâce à la question précédente :

$$\begin{aligned} |f(\tan(\theta)) - \frac{i}{2}| &= |\frac{i}{2}e^{-i\theta}| \\ &= |\frac{i}{2}||e^{-i\theta}| \\ &= \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

3) a) i)

$$\begin{aligned} f(z) = -\bar{z} + \sqrt{3} &\Leftrightarrow \frac{1}{\bar{z} - i} = -\bar{z} + \sqrt{3} \\ &\Leftrightarrow 1 = (\bar{z} - i)(-\bar{z} + \sqrt{3}) \\ &\Leftrightarrow \bar{z}^2 - (\sqrt{3} + i)\bar{z} + (\sqrt{3}i - 1) = 0 \end{aligned}$$

C'est une équation complexe du second degré en $\bar{z}$.

ii) Le discriminant Δ de cet équation vaut $(\sqrt{3}+i)^2 - 4(\sqrt{3}i - 1) = 6 - 2\sqrt{3}i = 4\sqrt{3}(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}) = 4\sqrt{3}e^{-\frac{i\pi}{6}}$.

iii) Les racines de Δ sont $\pm\delta$ où $\delta = \sqrt{4\sqrt{3}}e^{-\frac{i\pi}{12}}$ d'après le théorème rappellé en introduction, les solutions (pour $\bar{z}$) sont donc de la forme :

$$z_1 = \frac{\sqrt{3} + i + \delta}{2}$$

et

$$z_2 = \frac{\sqrt{3} + i - \delta}{2}$$

b)

$$\begin{aligned} f(z) = z &\Leftrightarrow z(\bar{z} - i) = 1 \\ &\Leftrightarrow a^2 + b^2 - ia + b = 1 \\ &\Leftrightarrow a = 0 \text{ et } a^2 + b^2 + b = 1 \\ &\Leftrightarrow a = 0 \text{ et } b^2 + b - 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow a = 0 \text{ et } b = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2} \end{aligned}$$

où a et b sont respectivement la partie réelle et imaginaire de z.

Problème n° 3

(**Autour de la fonction** arcsin)

Partie I

1) La fonction φ est définie sur R. De plus, les fonctions sin et Arcsin étant impaires, φ est impaire. Enfin, comme sin est 2π-périodique, $x \mapsto \sin(2x)$ est π-périodique. Il en va de même de φ. On pourra mener l'étude sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ puis compléter par symétrie centrale. Enfin, comme $\varphi\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \varphi(x)$, la droite d'équation $x = \frac{\pi}{4}$ est axe de symétrie. Résumons, φ est impaire et π-périodique.

2) - Soit $x \in [0, \pi/4]$. En ce cas, $2x \in [0, \pi/2]$. Par conséquent, $2x$ est l'unique antécédent de $\sin(2x)$ appartenant à $[-\pi/2, \pi/2]$, c'est-à-dire

$$\varphi(x) = \text{Arcsin}(\sin(2x)) = 2x$$

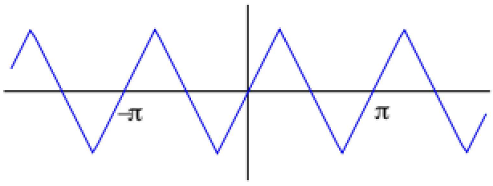
- Soit $x \in [\pi/4, \pi/2]$. En ce cas, $2x \in [\pi/2, \pi]$. D'où $\pi - 2x \in [0, \pi/2]$. Comme de plus,

$$\sin(2x) = \sin(\pi - 2x),$$

$\pi - 2x$ est l'unique antécédent de $\sin(2x)$ appartenant à $[-\pi/2, \pi/2]$, c'est-à-dire

$$\varphi(x) = \text{Arcsin}(\sin(2x)) = \pi - 2x$$

3) D'après les propriétés de symétrie de φ, il suffit de la représenter sur $[0, \pi/4]$, de compléter par symétrie par rapport à la droite $x = \frac{\pi}{4}$, puis par symétrie centrale et enfin de translater le graphe ainsi obtenu. On obtient ainsi :



Partie II

1) (**Intervalle d'étude**)

a) Soit $x \in \mathbf{R}$, on déduit de l'inégalité $(1-|x|)^2 \geqslant 0$ que $2|x| \leqslant 1 + x^2$. De plus, il y a égalité précisément lorsque $|x| = 1$.

b) La fonction Arcsin est définie sur $[-1, 1]$. Or, d'après la question précédente, pour tout $x \in \mathbf{R}, \left(\frac{2x}{1+x^2}\right)$ appartient à $[-1, 1]$. Par composition, f est donc définie sur $\mathbf{R}$.

c) Soit $x \in \mathbf{R}, f(-x) = \operatorname{Arcsin}\left(\frac{-2x}{1+x^2}\right) = -\operatorname{Arcsin}\left(\frac{2x}{1+x^2}\right) = -f(x)$. Par suite f est impaire.

2) (**Tableau de variations**)

a) Soit $t \in]-\pi/2, \pi/2[$, nous avons

$$\frac{2\tan t}{1+\tan^2 t} = \frac{2\frac{\sin t}{\cos t}}{1+\frac{\sin^2 t}{\cos^2 t}} = \frac{2\sin t \cos t}{\cos^2 t + \sin^2 t} = \sin(2t)$$

Ainsi, $f(\tan t) = \operatorname{Arcsin}\left(\frac{2\tan t}{1+\tan^2 t}\right) = \operatorname{Arcsin}(\sin 2t) = \varphi(t)$.

b) Soit $x \in \mathbf{R}$, Posons $t = \operatorname{Arctan}(x)$, de sorte que $t \in]-\pi/2, \pi/2[$ et $x = \tan t$. D'après la question précédente, il s'ensuit immédiatement que $f(x) = \varphi(t) = \varphi \circ \operatorname{Arctan}(x)$.

c) D'après les résultats de la Partie I - φ est strictement décroissante sur $]-\pi/2, -\pi/4]$, - φ est strictement croissante sur $]-\pi/4, \pi/4[$, - φ est strictement décroissante sur $[\pi/4, \pi/2[$.
La fonction Arctan : $\mathbf{R} \to]-\pi/2, \pi/2[$ est une bijection strictement croissante est continue. D'après le Théorème de la bijection, elle réalise des bijections strictement croissantes de ▹ de $]-\infty, -1]$ sur $]-\pi/2, -\pi/4]$, ▹ de $]-1, 1[$ sur $]-\pi/4, \pi/4[$, ▹ de $[1, \infty[$ sur $[\pi/4, \pi/2[$,
Par composition de deux fonctions monotones, nous en déduisons que - f est strictement décroissante sur $]-\infty, -1]$, - f est strictement croissante sur $]-1, 1[$, - f est strictement décroissante sur $[1, \infty[$.

d) Le tableau suivant résume les variations f :

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f(x)$	0	↘	$-\frac{\pi}{2}$	↗	0	↗	$\frac{\pi}{2}$	↘	0

Pour le calcul des limites en $\pm\infty$, procédons par composition : effectuons le changement de variable $y(x) = \operatorname{Arctan} x$, il vient : - $y(x) = \operatorname{Arctan}(x) \underset{x\to\pm\infty}{\longrightarrow} \pm\frac{\pi}{2}$ - $\varphi(y) \underset{y\to\pm\pi/2}{\longrightarrow} 0$

Par composition des limites, il s'ensuit que $\lim_{x\to\pm\pi/2} f(x) = 0$.

e) D'après la question 1.a, $\frac{2x}{1+x^2} \in]-1,1[$, pour tout x différent de 1 et -1 . Comme Arcsin est dérivable sur] - 1, 1[, il en résulte par composition que f est dérivable sur $\mathbf{R}\backslash\{\pm 1\}$. De plus, pour tout x différent de 1 et -1 , on a :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{\sqrt{1-\frac{4x^2}{(1+x^2)^2}}} \times \frac{2\left(1+x^2\right)-4x^2}{(1+x^2)^2} = \frac{1}{\sqrt{(1+x^2)^2-4x^2}} \times \frac{2\left(1-x^2\right)}{1+x^2} \\ &= \frac{2}{1+x^2} \times \frac{1-x^2}{\sqrt{(1-x^2)^2}} = \pm\frac{2}{1+x^2} \end{aligned}$$

Ainsi, - Pour tout $x \in]-1,1\left[, 1-x^2>0\right.$ et par conséquent $f'(x) = \frac{2}{1+x^2}$. - Pour tout $x \in]-\infty,-1[\cup]1,+\infty\left[, 1-x^2<0\right.$ et $f'(x) = -\frac{2}{1+x^2}$.