Chapitre 12 : Structures algébriques

C)Anneaux et corps

- Définition, exemples
- Règles de calculs (0 absorbant, $a(-b) = (-a)b = -ab$,itérés,distributivité généralisée) binôme de Newton pour éléments commutants,formule de Jacobi
- Ensemble des inversibles d'un anneau.
- Diviseurs de 0 et anneaux intègres.
- Morphismes d'anneaux
- Def corps, sous-corps, tout corps est intègre.

Chapitre 13 : Systèmes linéaires et matrices.

A) Introduction aux systèmes linéaires

- Opérations élémentaires(sur les lignes)
- Méthode du pivot : 3 cas
- Cas 1 : Une unique solution
- Cas 2 : Equation de compatibilité non vérifiée : système incompatible
- Cas 3 : Infinité de solutions : inconnues principales, inconnues secondaires.
- Systèmes dépendant d'un paramètre
- Interprétation géométrique systèmes à 2 inconnues (intersection de droites)
- Interprétation géométrique systèmes à 3 inconnues (intersection de plans)
- Résolution systèmes 2 équations 2 inconnues : Notion de déterminant
- Un système à 2 équations et 2 inconnues a une unique solution ssi son déterminant est non nul.

B) Matrices
$\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

- Ensemble des matrices à n lignes et p colonnes ($M_{n,p}(\mathbb{K})$).
- Matrice ligne, matrice colonne, i-ème colonne, j-ème ligne d'une matrice, Matrice carrée.
- Addition et multiplication par un scalaire, combinaison linéaire de matrices, matrice nulle.
- $(M_{n,p}(\mathbb{K}), +)$ est un groupe abélien.
- Matrices élémentaires, symbole de Kronecker
- Décomposition matrice comme combinaison linéaires de matrices élémentaires.
- Produit matriciel, existence de diviseurs de 0 et non "simplifiabilité" dans le produits.
- Bilinéarité et "associativité" du produit matriciel.
- Produit de 2 matrices élémentaires, produit d'une matrice par une matrice élémentaire.
- Transposition, propriétés de la transposition
- Opérations élémentaires sur les lignes et les colonnes
- Matrices de transvection, dilation, permutation.
- Lien matrices système

C) Systèmes linéaires (généraux)

- Définitions générales,équations,coefficients,inconnues, second membre, système homogène associé, solution.
- Ecriture matricielle d'un système linéaire.
- Structure ensemble des solutions (solution particulière +solution équation homogène).
- Algorithme du pivot de Gauss (se ramener aux cas de bases).

Questions de cours :

- Dans un anneau A, montrer les propriétés suivantes :
  a) $\forall a \in A \quad 0 \times a = a \times 0 = 0$, (0 est absorbant)
  b $\forall (a, b) \in A^2 \quad (-a) \times b = a \times (-b) = -(a \times b)$. (règle des signes)

- Résolution d'un (ou plusieurs) système 3× 3 ou 4 × 4 au choix du colleur, par méthode du pivot.
- On prouvera les 2 assertions suivantes :
  1) Lorsque les tailles des matrices rendent licite le produit matriciel, on a :
  $$E_{i,j}E_{k,\ell} = \delta_{j,k}E_{i,\ell} \quad \text{c'est-à-dire} \quad E_{i,j}E_{k,\ell} = \begin{cases} E_{i,\ell} & \text{si } j = k \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$
  2) Soit A une matrice et $E_{i,j}$ une matrice élémentaire. Si les tailles des matrices rendent licite le produit matriciel effectué, alors :
  la matrice $E_{i,j}A$ est celle dont toutes les lignes sont nulles, à l'exception de la i-ème, qui est égale à la j-ème ligne de A.
- On montrera les 2 propriétés suivantes :
  a) La bilinéarité du produit matriciel (on peut ne montrer qu'un des 2 sens)
  b) Pour $(A,B) \in M_{n,p}(\mathbb{R})^2$, montrer que $(AB)^T = B^T A^T$.