Chapitre 14 : Limites et continuité

A) Limite et continuité ponctuelle

- Définition notion de voisinage
- Lien avec la notion "à partir d'un certain rang" pour les suites.
- Définition limites finies et infinies en un point adhérent à l'intervalle de définition de la fonction.
- Unicité de la limite
- Une fonction qui admet une limite en un point de son intervalle de définition est continue en ce point (déf continuité)
- Toute fonction admettant une limite finie en un point est bornée au voisinage de ce point.
- Théorème de composition des limites / théorème de caractérisation séquentielle de la limite
- Caractère local de la limite
- Notion de limite à gauche et limite à droite d'un point
- Notion de continuité à gauche et de continuité à droite
- Notion de limite épointée/ prolongement par continuité en un point
- Théorème d'opérations sur les limites/continuité
- Théorèmes de passages à la limité
- Théorèmes d'encadrement,de majoration,de minoration
- Théorème de limite monotone

B) Continuité sur un intervalle

- Définition
- Opérations sur les fonctions continues
- Fonctions lipschitzienne (toute fonction lipschitzienne est continue).
- Théorème des valeurs intermédiares (version segment et intervalle)
- Théorème de la bijection
- Théorème des bornes atteintes (version classique et version segment)
- Fonctions continues et lien entre monotonie et injectivité (Vu Lundi)

C) Fonctions à valeurs complexes

- Adaptation des divers théorèmes aux fonctions à valeurs complexes. D) Applications aux suites définies par récurrences
  - Etude des suites définies par $u_0 \in I, u_{n+1} = f(u_n) \forall n \in \mathbb{N}$ avec $f : I \to I$.
  - Etude de la monotonie : le cas f croissant
  - Le cas f décroissant
  - Le cas général.
  - Théorème de convergence vers un point fixe si f continue.

Questions de cours :

POUR TOUS LES ETUDIANTS : Vous devez impérativement être capable de redonner la définition de limite finie ou infinie en un point fini ou infini et la définition de continuité en un point à l'aide de quantificateurs.

- Prouver le théorème de caractérisation séquentielle de la limite (l'équivalence entière). On ne montrera que le cas $a \in \mathbb{R}$ et $l \in \mathbb{R}$.

Théorème de caractérisation séquentielle de la limite

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction et $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) la fonction f a pour limite ℓ en a ;

(ii) pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans I de limite a, la suite $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ pour limite ℓ.

- **1)** Prouver le théorème de passage à la limite pour les fonctions à l'aide de suites (on se placera dans le cas où $f : I \to \mathbb{R}$ est telle que $f \geq b$ au voisinage de $a \in I$

2) À l'aide du théorème de caractérisation séquentielle de la limite, montrer :

Thm

Soit $(f,g) \in \mathcal{F}(I,\mathbb{R})^2$, et soit $a \in \overline{\mathbb{R}}$ adhérent à I. On suppose que f et g admettent respectivement $\ell \in R$ et $\ell' \in \mathbb{R}$ pour limite en a suivant I.
Alors $f\,.\,g$ admet $\ell\,.\,\ell'$ pour limite en a suivant I :

$$\lim_{x\to a} f(x)\cdot g(x) = \lim_{x\to a} f(x)\cdot \lim_{x\to a} g(x)$$

- Montrer le théorème des valeurs intermédiaire :

(Théorème des valeurs intermédiaires).

Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a \leqslant b$, et soit $f \in \mathcal{C}([a;b],\mathbb{R})$. Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ compris entre $f(a)$ et $f(b)$ (i.e. $\lambda \in [f(a);f(b)]$ si $f(a) \leqslant f(b)$ et $\lambda \in [f(b);f(a)]$ si $f(a) > f(b)$), il existe $c \in [a;b]$ tel que $f(c) = \lambda$.

- Montrer que toute fonction continue sur un segment est continue et atteint ses bornes.