Chapitre 15 : Dérivabilité

A) Dérivabilité en un pointDéfinition Dérivable implique continue Une fonction est dérivable si et seulement si elle admet un développement limité à l'ordre 1. Tangente en un point où la fonction est dérivable Opération sur les fonctions dérivables (somme, produit,...) Dérivabilité à gauche, à droite.

B) Dérivabilité sur un intervalle

- Définition
- Opérations sur les fonctions dérivables
- Dérivabilité de la bijection réciproque.
- Opération sur les fonctions dérivables (somme, produit,...)

C) extremas, théorème de Rolle, TAF et IAF

- Définitions extremas locaux et globaux
- Point critique.
- Un extrema est un point critique.
- Théorème de Rolle
- Théorème des acroissemens finis
- Inégalité des acroissements finis

D) Applications

- Lien entre monotonie et signe de la dérivée sur un intervalle.
- Théorème de limite de la dérivée.
- Etude des suites récurrentes $u_{n+1} = f(u_n)$ pour $f \in D(I,I)$ telle que $|f^{'}| \leq k < 1$.

E) Fonctions de classe C_k

- Définitions générales
- Premiers résultats
- Formule de Leibniz.
- Opérations sur les fonctions de classe C_k.
- Preuve qu'une fonction est de classe C_k ou C_∞ par récurrence par théorème limite de la dérivée.

F) Fonctions dérivables à valeurs complexes

- Adaptation des définitions et théorèmes existants aux cas complexes.

Chapitre 16 : Convexité

A) Définitions et exemples

- Définition barycentres
- Définition de la convexité
- Premiers exemples.

b) Caractérisation et conséquences de la convexité

- Définition cordes et sécantes
- Position de la courbe d'une fonction convexe par rapport à ses cordes ou à ses sécantes.

- Pour $f : I \to \mathbb{R}$, $a \in I$, et

$$\begin{aligned}\tau_a :& I\backslash\{a\} \to \mathbb{R}\\ & x \mapsto \frac{f(x)-f(a)}{x-a}\end{aligned}$$

  alors τ_a croissante pour tout a dans $I \Longleftrightarrow f$ croissante.
- Inégalité des pentes
- Continuité des fonctions convexes sur un intervalles ouvert.
- Inégalité de Jensen

c) Fonctions convexes dérivables et deux fois dérivables

- Une fonction dérivable est convexe si et seulement si sa dérivée est croissante.
- Position du graphe d'une fonction convexe dérivable par rapport à ses tangentes.

Questions de cours :

- Preuve du théorème de Rolle et du théorème des acroissements finis.
- Preuve du théorème de limite de la dérivée puis étude pour $n \in \mathbb{N}^*$ de la continuité en 0, dérivabilité en 0 et continuité de la dérivée en 0 pour les fonctions $f_n : x \mapsto x^n \sin(\frac{1}{x})$.
- Pour $f : I \to \mathbb{R}$ dérivable sur I on prouvera les 3 propriétés suivantes :
  a) $f^{'} \geq 0 \Longleftrightarrow f$ croissante sur I.
  b) Si : $\forall x \in I, f'(x) \geqslant 0$, et que f' s'annule au plus un nombre fini de fois sur I, alors f est strictement croissante sur I.
  c) Si f est strictement croissante sur I, alors : $\forall x \in I, f'(x) \geqslant 0$ et pour tout sous-intervalle $J \subset I$, il existe $x \in J$ tel que $f'(x) > 0$.
- Pour $f : I \to \mathbb{R}$, $a \in I$, et

$$\begin{aligned}\tau_a :& I\backslash\{a\} \to \mathbb{R}\\ & x \mapsto \frac{f(x)-f(a)}{x-a}\end{aligned}$$

  alors τ_a croissante pour tout a dans $I \Longleftrightarrow f$ convexe (on admettra pour ceci l'inégalité des pentes pour une fonction convexe)
- Preuve de l'inégalité de Jensen.