Chapitre 19 : Polynômes

A) Anneau des polynômes à une indéterminée

- Anneau $\mathbb{K}[X]$ pour $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Cet anneau est commutatif
- Dégré, coefficient dominant,polynôme unitaire,
- Dégré d'une somme, d'un produit
- Composition de deux polynômes.
- $(\mathbb{K}_n[X],+)$ sous groupe de $(\mathbb{K}[X],+)$
- $K[X]$ est intègre.

B) Divisibilité

- Définition divisibilité de polynômes, diviseurs, multiples...
- Premières propriétés
- Lien entre divisibilité et degré
- Caractérisation des polynômes associés
- Théorème et algorithme de la division euclidienne

C) Fonction polynomiales et racines

- Fonction polynomiale associée à un polynôme
- Evaluation d'un polynôme (méthode de Horner)
- Racines d'un polynôme
- Lien entre racine d'un polynôme et divisibilité
- Multiplicité d'une racine
- Le nombre de racines d'un polynôme non nul est majoré par son degré
- Polynôme scindé, relations coefficients racines.

D) Polynôme dérivé

- Définition
- Degré du polnôme dérivé et des dérivées successives
- Opérations sur les polynômes dérivées (somme, produit, Leibniz,...)

Questions de cours :

- Prouver le théorème de la division euclidienne pour les polynômes (existence et unicité) puis calcul d'une division euclidienne de polynôme au choix du colleur.
- On prouvera les résultats suivants.
  1) Montrer que : λ racine de $P \in \mathbb{K}[X] \Longleftrightarrow (X-\lambda)|P$.
  2) Soit $P \in \mathbb{K}[X]\backslash\{0\}, \lambda \in \mathbb{K}$ et $m \in \mathbb{N}$. $m_P(\lambda) = m$ si et seulement si il existe $Q \in \mathbb{K}[X]$ tel que $P = (X-\lambda)^m Q$ et $Q(\lambda) \neq 0$.
  3) Soit $(P,Q) \in (\mathbb{K}[X]\backslash\{0\})^2$, montrer que $\forall \lambda \in \mathbb{K}, m_{PQ}(\lambda) = m_P(\lambda) + m_Q(\lambda)$.
- On prouvera les résultats suivants :
  1) Prouver que si $\lambda_1, ..., \lambda_n$ sont des racines distinctes de $P \in \mathbb{K}[X]$ alors $\prod_{i=1}^{n}(X-\lambda_i)|P$.
  2) Montrer qu'un polynôme non-nul a moins de racines distinctes que son degré.
  3) Montrer qu'un polynôme ayant une infinité de racines est nul.
  4) Soit $n \in \mathbb{N}$ et $(P,Q) \in K_n[X]$. Soit $(\alpha_1, ..., \alpha_{n+1}) \in \mathbb{K}^{n+1}$ distincts, tel que $\forall i \in P(\alpha_i) = Q(\alpha_i)$. Montrer que $P = Q$.
- On montrera les résultats suivants
  1) Montrer que le produit de polynômes scindés est scindé.
  2) Redonner les relations coefficients racines pour des polynômes de degré 2 et 3.
  3) Montrer que si $(P,Q) \in \mathbb{K}[X]$, $(PQ)' = P^{'}Q + Q^{'}P$. (Vu Lundi).